Capítulo 8

Filtros

En el capítulo previo vimos que una red de retrasos puede tener una respuesta a la frecuencia no uniforme -una ganancia que varía en función de la frecuencia. Las redes de retraso también cambian típicamente la fase de las señales de entrada de manera variable, dependiendo de la frecuencia. Cuando los tiempos de retraso utilizados son muy cortos, las propiedades más importantes de una red de retrasos vienen a ser su respuesta a la frecuencia y a la fase. Una red de retrasos que está diseñada específicamente para su respuesta a la frecuencia o a la fase es llamada un *filtro*.

En diagramas de bloques, los filtros se muestran como en la figura 8.1 (parte a). La curva que se ve dentro del bloque da una representación cualitativa de la respuesta a la frecuencia del filtro. La respuesta a la frecuencia puede variar con el tiempo, y dependiendo del diseño del filtro, uno o más controles (o entradas de audio adicionales) podrían utilizarse para cambiarla.

Suponga, siguiendo el procedimiento de la sección 7.3, que ponemos una sinusoide de una unidad de amplitud, de valor complejo con frecuencia angular ω dentro del filtro. Esperamos obtener una sinusoide de la misma frecuencia y alguna amplitud que depende de ω. Esto nos da una función $H(\omega)$ de valor complejo, llamada *función de transferencia* del filtro.

La respuesta a la frecuencia es la ganancia como una función de la frecuencia ω. Esta es igual a la magnitud de la función de transferencia. Una respuesta a la frecuencia de un filtro se acostumbra graficar como en la figura 8.1 (parte b). Una sinusoide entrante de amplitud unitaria de frecuencia ω sale del filtro con magnitud $|H(\omega)|$.

A veces es útil conocer la respuesta a la fase de un filtro, igual a $\angle(H(\omega))$. Para una frecuencia fija ω la fase de salida del filtro será $\angle(H(\omega))$ radianes por delante de su fase de entrada.

El diseño y la utilización de los filtros es una materia completa, debido a que el amplio rango de los usos de un filtro podría sugerir una variedad amplia de procesos para sus diseños. En algunas aplicaciones un filtro debe seguir exactamente una respuesta a la frecuencia prescrita, en otros es importante minimizar el tiempo de cómputo, en otros la respuesta a la fase es importante, y en otros aún, el filtro debe comportarse bien cuando sus parámetros cambian rápidamente con el tiempo.

8.1 Taxonomía de los filtros

A lo largo de la historia de la música electrónica la tecnología para la construcción de filtros ha cambiado continuamente, pero cierto tipo de filtros reaparecen con frecuencia. En esta sección daremos alguna nomenclatura que describe filtros de varios tipos genéricos y recurrentes. Luego desarrollaremos algunas estrategias para fabricar filtros con características deseadas y finalmente discutiremos algunas aplicaciones comunes de los filtros en la música electrónica.

8.1.1 Filtros pasa-bajos y pasa-altos

El propósito más frecuente para el uso de un filtro es extraer la porción de las frecuencias bajas o de las frecuencias altas de una señal de audio, atenuando el resto. Esto se logra utilizando un filtro *pasa-bajos* o *pasa-altos*.

Idealmente un filtro pasa-bajos o pasa-altos debe tener una respuesta a la frecuencia de uno para una frecuencia de corte específica hacia arriba (o hacia abajo) y de cero si se pasa de allí; pero tales filtros no pueden realizarse en la práctica. En lugar de esto tratamos de encontrar aproximaciones viables para esta respuesta ideal. Ponemos en esto la mayor parte del esfuerzo de diseño y de tiempo de cómputo, para acercarnos a esto lo mejor posible.

La figura 8.2 muestra la respuesta a la frecuencia de un filtro pasa-bajos. La frecuencia está dividida en tres bandas, etiquetadas en el eje horizontal. La *banda de paso* es la región (banda de frecuencia) en la cual filtro debe pasar su entrada a su salida con ganancia unitaria. Para un filtro pasa-bajos (como el que se muestra), la banda de paso va desde una frecuencia de cero hasta un cierto límite de frecuencia hacia arriba. Para un filtro pasa-altos la banda de paso debe aparecer en el lado de la derecha de la gráfica y extenderse desde el límite de frecuencia hasta la más alta frecuencia posible. Cualquier banda de paso de un filtro real será únicamente aproximadamente plana; la desviación de la planitud es llamada *rizo*, y usualmente se especifica dando la razón entre la ganancia más alta y la más baja en la banda de paso, expresada en decibeles. El filtro pasa-bajos o pasa-altos ideal debe tener un rizo de 0 dB.

La *banda de parada* de un filtro pasa-bajos o pasa-altos es la banda de frecuencia sobre la cual el filtro intenta no transmitir su entrada. La *atenuación de la banda de parada* es la diferencia, en decibeles, entre la ganancia más baja en la banda de paso y la ganancia más alta en la banda de parada. Idealmente esta debería ser infinita, y entre más alta, mejor.

Finalmente un filtro realizable, cuya respuesta a la frecuencia es siempre una función continua de la frecuencia, debe tener una banda de frecuencia sobre la cual la ganancia cae desde la ganancia de la banda de paso hasta la ganancia de la banda de parada; esta es llamada *banda de transición*. Mientras más delgada se hace esta banda, se acerca más al filtro ideal.

8.1.2 Filtros pasa-banda y de banda de parada

Un *filtro pasa-banda* admite frecuencias dentro de una banda dada, rechazando frecuencias por debajo y por encima de esta. La figura 8.3 muestra la respuesta a la frecuencia de un filtro pasa-banda, indicando sus parámetros claves. Un filtro de banda de parada hace lo contrario, rechazando las frecuencias dentro de la banda y dejando pasar las frecuencias por fuera de ésta.

En la práctica, un idioma más simple es utilizado con frecuencia para describir los filtros pasa-banda, como se muestra en la figura 8.4. Aquí hay únicamente dos parámetros: un *centro de frecuencia* y un *ancho de banda*. Se considera que la banda de paso es la región donde el filtro tiene hasta la mitad de la ganancia pico de potencia (es decir, la ganancia está a 3 decibeles de su máximo). El ancho de banda es el ancho, medido en unidades de frecuencia, de la banda de paso. El centro de frecuencia es el punto de la máxima ganancia, el cual es aproximadamente el punto medio de la banda de paso.

8.1.3 Filtros de ecualización

En algunas aplicaciones, tales como la ecualización, el objetivo no es el paso de señales con ciertas frecuencias, deteniendo otras al mismo tiempo, si no realizar ajustes controlables, acentuando o atenuando una señal, sobre un rango de frecuencia, por una ganancia deseada. Dos tipos de filtros son útiles para esto. Primero, un *filtro de realce <shelving>* (figura 8.5) es utilizado para acentuar o reducir selectivamente ya sea lo más grave o lo más agudo del rango de frecuencia. Por debajo de un cruce de frecuencia seleccionada, el filtro tiende a una ganancia de frecuencias graves, y por encima de ésta, tiende a una ganancia de las altas. La frecuencia de cruce, la ganancia de las frecuencias bajas y la ganancia de las frecuencias altas puede ser ajustada de manera independiente.

El segundo, un *filtro de pico* (figura 8.6), es capaz de acentuar o atenuar señales dentro de un rango de frecuencias. La frecuencia central y el ancho de banda (los cuales controlan de manera conjunta el rango de frecuencias afectado), y las ganancias dentro de la banda y por fuera de la banda, son ajustadas por separado.

Los ecualizadores paramétricos usualmente emplean dos filtros de realce (uno para ajustar los bajos y otro para los agudos) y dos o tres filtros de pico para ajustar las bandas entre aquéllos.

8.2 Filtros elementales

Vimos en el capítulo 7 cómo predecir la respuesta a la frecuencia y a la fase de las redes de retrasos. El arte del diseño de filtros está en encontrar una red de retraso cuya función de transferencia (la que controla la respuesta a la frecuencia y a la fase) tiene una forma deseada. Desarrollaremos una aproximación para la construcción de tales redes de retraso con los dos tipos de filtros peine desarrollados en el capítulo 7: con recirculación y sin recirculación. Aquí estaremos interesados en el caso especial en cual el retraso es de sólo una muestra de longitud. En esta situación, las respuestas a la frecuencia mostradas en las figuras 7.6 y 7.10 ya no parecerán peines; el segundo pico desaparece del todo para la velocidad de muestras 2π radianes, cuando $d = 1$. Ya que únicamente las frecuencias entre 0 y la frecuencia de Nyquist (π radianes) son audibles, en efecto hay un solo pico cuando $d = 1$.

En los filtros peine mostrados en el capítulo 7, los picos están situados en DC (frecuencia cero), pero usualmente queremos ubicarlos en otras frecuencias diferentes de cero. Esto se hace utilizando redes de retraso -filtros peine- con ganancias de valor complejo.

8.2.1 Filtro elemental sin recirculación

Los filtros peine sin recirculación pueden ser generalizados dando lugar al diseño mostrado en la figura 8.7. Este es el *filtro elemental sin recirculación*, de la primera forma. Su único parámetro de valor complejo Q controla la ganancia compleja de la señal retrasada sustraída de la señal original.

Para encontrar su respuesta a la frecuencia, como en el capítulo 7 alimentamos la red de retraso con una sinusoide compleja 1, Z, Z^2, ... con frecuencia $\omega = \arg(Z)$. La n-ésima muestra de la entrada es Z^n y la salida de esta es

$$(1 - QZ^{-1})Z^n$$

de tal manera que la función de transferencia es

$$H(Z) = 1 - QZ^{-1}$$

Esto puede analizarse gráficamante como se muestra en la figura 8.8. Los números reales r y α son la magnitud y el argumento del número complejo Q:

$$Q = r \cdot (\cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha))$$

La ganancia del filtro es la distancia desde el punto Q al punto Z en el plano complejo. Analíticamente podemos ver esto porque

$$|1 - QZ^{-1}| = |Z||1 - QZ^{-1}| = |Q - Z|$$

Gráficamente, el número QZ^{-1} es precisamente el número Q rotado hacia atrás (en el sentido de las agujas del reloj) por la frecuencia angular ω de la sinusoide de entrada. El valor $|1 - QZ^{-1}|$ es la distancia desde QZ^{-1} a 1 en el plano complejo, la cual es igual a la distancia de Q a Z.

Ya que la frecuencia de entrada va y viene de 0 a 2π, el punto Z viaja en el sentido contrario a las manecillas de reloj alrededor del círculo unitario. En el punto donde $\omega = \alpha$, la distancia es como mínimo, igual a $1 - r$. El máximo ocurre cuando Z está en el punto opuesto del círculo. La figura 8.9 muestra la función de transferencia para tres valores diferentes de $r = |Q|$.

8.2.2 Filtro sin recirculación, segunda forma

Algunas veces necesitaremos una variante del filtro anterior, como se ve en la figura 8.10, llamado el filtro sin recirculación segunda forma. En lugar de multiplicar el retraso de salida por Q, multiplicamos la señal directa por su complejo conjugado $\overline{Q}$. Si

$$A = a + bi = r \cdot (\cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha))$$

es un número complejo, su complejo conjugado está definido como:

$$\overline{A} = a - bi = r \cdot (\cos(\alpha) - i\operatorname{sen}(\alpha))$$

Gráficamente este refleja puntos del plano complejo arriba y abajo alrededor del eje real. La función de transferencia del nuevo filtro es

$$H(Z) = \overline{Q} - Z^{-1}$$

Esto da lugar a la misma respuesta a la frecuencia de antes ya que

$$|\overline{Q} - Z^{-1}| = |Q - \overline{Z^{-1}}| = |Q - Z|$$

Aquí utilizamos el hecho de que $\overline{Z} = Z^{-1}$ para cualquier número complejo unitario Z, tal como puede ser verificado al escribir $Z\overline{Z}$ ya sea en la forma rectangular o en la forma polar.

Aunque las dos formas del filtro elemental sin recirculación tienen la misma respuesta a la frecuencia, sus respuestas a la fase son diferentes; esto ocasionalmente nos hará preferir la segunda forma.

8.2.3 Filtro elemental con recirculación

El filtro elemental con recirculación es el filtro peine con recirculación de la figura 7.7 con una ganancia de retroalimentación compleja P, como se muestra en la figura 8.11 (parte a). Con el mismo análisis de antes, alimentamos esta red con una sinusoide cuya n-ésima muestra Z^n da una salida de:

$$Z^n/(1 - PZ^{-1})$$

de tal manera que la función de transferencia es

$$H(Z) = 1/(1 - PZ^{-1})$$

El filtro con recirculación es estable cuando $|P| < 1$; si por el contrario, $|P| > 1$, la salida crece exponencialmente cada que la muestra retrasada recircula.

La función de transferencia es de esta manera precisamente la inversa de la del filtro sin recirculación (primera forma). Al poner los dos en serie con $P = Q$, la salida teóricamente iguala la entrada. (Este análisis sólo cumple para entradas sinusoidales; que se cumple también para otras señales, puede ser verificado trabajando la respuesta al impulso combinada de la red).

8.2.4 Filtros compuestos

Podemos utilizar los filtros con recirculación y sin recirculación desarrollados aquí para crear un filtro compuesto poniendo varios de los filtros elementales en serie. Si los parámetros de los no recirculantes (del primer tipo) son $Q_1,...Q_j$ y los de los recirculantes son $P_1,...P_k$, entonces, al ponerlos a todos en serie, en cualquier orden, nos dará la función de transferencia:

$$H(Z) = [(1 - Q_1Z^{-1})...(1 - Q_jZ^{-1})]/[(1 - P_1Z^{-1})...(1 - P_kZ^{-1})]$$

La respuesta a la frecuencia del filtro compuesto resultante es el producto de las respuestas de sus elementales. (Uno podría combinar también filtros elementales sumando sus salidas o haciendo redes de ellos más complicadas; pero para la mayoría de los propósitos la configuración en serie es con la que se trabaja más fácilmente.)

8.2.5 Salidas reales de filtros complejos

En la mayoría de las aplicaciones, comenzamos con una señal de valor real para filtrar y requerimos una salida de valor real, pero en general un filtro compuesto con una función de transferencia como la anterior nos dará una salida de valor complejo. Sin embargo podemos construir filtros con coeficientes no reales los cuales no obstante dan salidas con valores reales, de tal manera que el análisis que hacemos utilizando números complejos puede ser utilizado para predecir, explicar y controlar señales de salida de valor real. Hacemos esto emparejando cada filtro elemental (con coeficiente P o Q) con otro que tenga como su coeficiente el complejo conjugado $\overline{P}$ o $\overline{Q}$.

Por ejemplo, al poner dos filtros sin recirculación, con coeficientes Q y $\overline{Q}$ en serie, nos queda una función de transferencia igual a:

$$H(Z) = (1 - QZ^{-1}) \cdot (1 - \overline{Q}Z^{-1})$$

la cual tiene la propiedad de que:

$$H(\overline{Z}) = \overline{H(Z)}$$

Ahora si ponemos una sinusoide de valor real:

$$X_n = 2\mathrm{re}(AZ^n) = AZ^n + \overline{AZ}^n$$

obtenemos:

$$A \cdot H(Z) \cdot Z^n + \overline{A} \cdot \overline{H(Z)} \cdot \overline{Z}^n$$

la cual, por inspección, es otra sinusoide. Aquí estamos utilizando dos propiedades de los complejos conjugados. La primera, que se puede sumarlos y multiplicarlos a voluntad:

$$\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$\overline{AB} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

y segundo que cualquier suma con su complejo conjugado es real y es precisamente dos veces su parte real:

$$A + \overline{A} = 2\mathrm{re}(A)$$

Este resultado para dos filtros conjugados se extiende para cualquier filtro compuesto; en general, siempre obtenemos una salida con valor real de una entrada con valor real si disponemos para que cada coeficiente Q_i y P_i en el filtro compuesto sea de valor real o aparezca emparejado con su complejo conjugado.

8.2.6 Dos filtros con recirculación por el precio de uno

Cuando emparejamos filtros con recirculación elementales, es posible evitar el cómputo de cada par, siempre y cuando la entrada sea de valor real (y por lo tanto la salida también.) Suponiendo que la entrada es una sinusoide real de la forma:

$$AZ^n + \overline{A}Z^{-n}$$

y aplicamos un solo filtro son recirculación con coeficiente P. Siendo $a[n]$ la parte real de la salida, tenemos:

$$a[n] = \mathrm{re}[AZ^n/(1 - PZ^{-1}) + \overline{A}Z^{-n}/(1 - PZ)]$$

$$= \mathrm{re}[AZ^n/(1 - PZ^{-1}) + AZ^n/(1 - \overline{P}Z^{-1})]$$

$$= \mathrm{re}[(AZ^n)(2 - 2\mathrm{re}(P)Z^{-1})/((1 - PZ^{-1})(1 - \overline{P}Z^{-1}))]$$

$$= \mathrm{re}[[(AZ^n)(1 - \mathrm{re}(P)Z^{-1})/((1 - PZ^{-1})(1 - \overline{P}Z^{-1})) + [(\overline{AZ^{-n}})(1 - \mathrm{re}(P)\overline{Z}^{-1})/((1 - \overline{PZ}^{-1})(1 - \overline{P}Z^{-1}))]]$$

(En el segundo paso usamos el hecho de que usted puede conjugar parte o el total de una expresión, sin cambiar el resultado, si usted de todas maneras, sólo va a tomar la parte real. En el cuarto paso se hizo lo mismo, pero en sentido inverso.) Comparando la entrada con la salida, vemos que el efecto de pasar una señal real a través de un filtro complejo de un polo y luego tomar su parte real, es equivalente a pasar la señal a través de un filtro con un cero, dos polos, con función de transferencia igual a:

$$H_{\mathrm{re}}(Z) = (1 - \mathrm{re}(P)Z^{-1})/((1 - PZ^{-1})(1 - \overline{P}Z^{-1}))$$

Unos cálculos similares muestran que tomar la parte imaginaria (considerada como una señal real) es equivalente a filtrar la entrada con la función de transferencia:

$$H_{\mathrm{im}}(Z) = (\mathrm{im}(P)Z^{-1})/((1 - PZ^{-1})(1 - \overline{P}Z^{-1}))$$

Así, al tomar la parte real o imaginaria de un filtro de un polo, a la salida obtenemos dos filtros con dos polos conjugados. Las dos partes pueden ser combinadas para sintetizar filtros con otros posibles numeradores; en otras palabras, con un filtro con recirculación complejo podemos sintetizar un filtro que actúe sobre las señales reales con dos polos (complejos conjugados) y un cero (real).

Esta técnica, conocida como *fracciones parciales*, puede ser repetida por cualquier número de etapas en serie, siempre y cuando computemos la combinación apropiada de las partes real e imaginaria a la salida de cada etapa para formar la entrada (real) de la siguiente etapa. No parecen existir atajos similares para los filtros sin recirculación; para ellos es necesario computar cada miembro de cada par complejo conjugado explícitamente.

8.3 Diseño de filtros

La respuesta a la frecuencia de una serie de filtros elementales con recirculación y sin recirculación puede estimarse gráficamante dibujando todos los coeficientes $Q_1,...Q_j$ y $P_1,...P_k$ en el plano complejo y razonando como en la figura 8.8. La respuesta a la frecuencia general es el producto de todas las distancias desde el punto Z a cada uno de los Q_i, dividida por el producto de las distancias a cada uno de los P_i.

Uno habitualmente marca cada uno de los Q_i con una “o” (y lo llama un “cero”) y cada uno de los P_i con una “x” (un “polo”); sus nombres son prestados del campo del análisis complejo. Un gráfico mostrando los polos y los ceros asociados con un filtro es llamado con poca imaginación, *gráfico polo-cero*.

Cuando Z está cercano a cero la respuesta a la frecuencia tiende a sumergirse, y cuando está cerca a un polo, tiende a elevarse. El efecto de un polo o de un cero es más pronunciado, y también más localizado, si está cerca al círculo unitario en el cual está constreñido Z. Los polos deben quedar dentro del círculo unitario para ser un filtro estable. Los ceros pueden quedar sobre o por fuera de este, pero cualquier cero Q por fuera del círculo unitario puede ser reemplazado por uno dentro de el, en el punto $1/\overline{Q}$, para dar un múltiple constante de la misma respuesta a la frecuencia. Excepto en casos especiales mantendremos los ceros dentro del círculo al igual que los polos.

En el resto de esta sección mostraremos cómo construir algunos de los tipos de filtros más ampliamente utilizados en la música electrónica. La teoría del diseño del filtro digital es vasta, y aquí únicamente daremos una introducción. Un tratamiento más profundo está disponible en línea por Julius Smith en ccrma.stanford.edu. Ver también [Ste96] para una introducción al diseño de filtros desde el punto de vista más general del procesamiento de señal digital.

8.3.1 Filtro pasa-bajos de un polo

El filtro pasa-bajos de un polo posee un solo polo localizado en un número real positivo p, como se ilustra en la figura 8.12. Este es sólo un filtro peine con recirculación con retraso de longitud $d = 1$, y se aplica el análisis de la sección 7.7. La ganancia máxima ocurre a la frecuencia cero, correspondiendo al punto en el círculo más cercano al punto p. La ganancia aquí es $1/(1 - p)$. Asumiendo que p es cercano a uno, si nos movemos una distancia de $1 - p$ unidades hacia arriba o hacia abajo del eje real (horizontal), la distancia se incrementa por un factor de aproximadamente $\sqrt{2}$, y de esta manera esperamos que el punto de mitad de potencia ocurre en una frecuencia angular de aproximadamente $1 - p$.

Este cálculo es usualmente hecho a la inversa: si queremos que el punto de mitad de la potencia quede a una frecuencia angular ω, hacemos $p = 1 - \omega$. Esta aproximación sólo trabaja bien si el valor ω está bien por debajo de $\pi/2$, como es usual en la práctica. Es costumbre normalizar el filtro pasa-bajos de un polo, multiplicándolo por el factor constante $1 - p$ para dar una ganancia de 1 a la frecuencia cero; las frecuencias que no son cero tendrán entonces una ganancia menor que uno.

La respuesta a la frecuencia es graficada en la figura 8.12 (parte b). Las frecuencias audibles únicamente alcanzan la mitad de la gráfica; el lado derecho de la curva de respuesta a la frecuencia queda toda por encima de la frecuencia de Nyquist π.

El filtro pasa-bajos de un polo se utiliza con frecuencia para buscar las tendencias en señales ruidosas. Por ejemplo, si se utiliza un controlador físico y sólo interesan los cambios en el orden de 1/10 de segundo, se pueden suavizar los valores con un filtro pasa-bajos cuyo punto de mitad de potencia es de 20 o 30 ciclos por segundo.

8.3.2 Filtro pasa-altos de un polo y un cero

A veces una señal de audio lleva una constante desviada que no se desea, o en otras palabras, un componente de frecuencia cero. Por ejemplo, el espectro de onda de la sección 5.3 casi siempre contiene un componente constante. Este es inaudible, pero, debido a que especifica la potencia eléctrica que es enviada a sus parlantes, su presencia reduce el nivel de volumen que usted puede alcanzar sin distorsión. Otro nombre para un componente de señal constante es “DC”, que significa “corriente directa”.

Una forma fácil y práctica para remover el componente de frecuencia cero de una señal de audio es utilizar un filtro pasa-bajos de un polo para extraerlo, y luego sustraer el resultado de la señal. La función de transferencia resultante es uno menos la función de transferencia del filtro pasa-bajos:

$$H(Z) = 1 - (1 - p)/(1 - pZ^{-1}) = p\ (1 - Z^{-1})/(1 - pZ^{-1})$$

El factor de 1 - p en el numerador de la función de transferencia del filtro pasa-bajos es el factor de normalización requerido para que la ganancia sea uno en la frecuencia cero.

Examinando el lado derecho de la ecuación (comparándolo con la fórmula general para los filros compuestos), vemos que todavía hay un polo en el número real p, y hay ahora también un cero en el punto 1. El gráfico del polo cero se muestra en la figura 8.13 (parte a), y la respuesta a la frecuencia en la parte (b). (A partir de ahora graficaremos únicamente respuestas hasta la frecuencia de Nyquist π; en el ejemplo previo graficamos todo hasta la velocidad de las muestras 2π.)

8.3.3 Filtros de realce <”shelving”>

Generalizando el filtro anterior de un polo y un cero, suponga que ubicamos el cero en un punto q, un número menor que uno pero cercano a este. El polo, en el punto p, está situado de manera similar, y podría ser mayor que o menor que q, es decir, a la derecha o a la izquierda respectivamente, pero con ambos, p y q dentro del círculo unitario. Esta situación se diagrama en la figura 8.14.

En los puntos del círculo que están lejos de p y q los efectos del polo y del cero son casi inversos (las distancias hasta ellos son casi iguales), de tal manera que el filtro pasa aquellas frecuencias casi sin alteraciones. En las vecindades de p y q, del otro lado, el filtro tendrá una ganancia mayor o menor que uno dependiendo de cuál de los dos p o q está más cercano al círculo. Esta configuración actúa de esta manera como un filtro realce de baja frecuencia. (para fabricar un filtro realce de alta frecuencia hacemos lo mismo, sólo que ubicamos p y q cercanos a -1 en lugar de 1.)

Para encontrar los parámetros de un filtro de realce dada una transición de frecuencia ω (en unidades angulares) y ganancia de baja frecuencia g, escogemos primero una distancia promedio d, como se ilustra en la figura, desde el polo y el cero hacia el borde del círculo. Para valores pequeños de d, la región de influencia es cerca de d radianes, así que simplemente hacemos $d = \omega$ para obtener la transición de frecuencia deseada.

Ponemos luego el polo en $p = 1 - d/\sqrt{g}$ y el cero en $q = 1 - d/\sqrt{g}$. La ganancia en la frecuencia cero es entonces

$$(1 - q)/(1 - p) = g$$

tal como se quería. Por ejemplo, en la figura, d es 0.25 radianes y g es 2.

8.3.4 Filtro pasa-banda

Comenzando con los tres tipos de filtros mostrados arriba, todos con polos y ceros de valor real, los transformamos ahora para operar en bandas localizadas por fuera del eje real. Los filtros pasa-bajos, pasa-altos y de realce se convertirán en filtros pasa-banda, banda de parada y de pico. Desarrollemos primero el filtro pasa-banda. Suponga que queremos un centro de frecuencia a ω radianes y un ancho de banda de β, aproximadamente a $p = 1 - \beta$. Rote ahora este valor en ω radianes en el plano complejo, es decir, multiplique por el número complejo $\cos\omega + i\,\mathrm{sen}\omega$. El nuevo polo queda en

$$P_1 = (1 - \beta)(\cos\omega + i\,\mathrm{sen}\omega)$$

Para tener una salida de valor real, esta debe estar emparejada con otro polo:

$$P_2 = \overline{P}_1 = (1 - \beta)(\cos\omega - i\,\mathrm{sen}\omega)$$

El gráfico polo-cero resultante se muestra en la figura 8.15.

El pico está aproximadamente (no exactamente) en el centro de frecuencia deseado ω, y la respuesta a la frecuencia cae en 3 decibeles aproximadamente β radianes por encima y por debajo de este. Usualmente se quiere normalizar el filtro para tener una ganancia pico cercana a la unidad; esto se hace multiplicando la entrada o la salida por el producto de las distancias de los dos polos al pico en el círculo, o (muy aproximadamente):

$$\beta * (\beta + 2\omega)$$

Para alguna aplicaciones es deseable adicionar un cero en los puntos 1 y -1, de tal manera que la ganancia cae a cero en las frecuencias angulares 0 y π.

8.3.5 Filtro pico y banda de parada

De la misma manera un filtro pico se obtiene de un filtro de realce rotando el polo y el cero, y proveyendo un polo y un cero conjugados, como se muestra en la figura 8.16. Si el centro de frecuencia deseado es ω y los radios del polo y del cero son p y q, entonces ubicamos el polo y el cero de arriba en

$$P_1 = p \bullet (\cos\omega + i\,\mathrm{sen}\omega)$$

$$Q_1 = q \bullet (\cos\omega + i\,\mathrm{sen}\omega)$$

Como un caso especial, colocar el cero sobre el círculo unitario da un filtro de banda de parada; en este caso la ganancia en el centro de frecuencia es cero. Este es análogo al filtro pasa-altos de un polo y un cero visto anteriormente.

8.3.6 Filtros Butterworth

Un filtro con un polo real y un cero real puede ser configurado como un filtro de realce, como un filtro pasa-altos (poniendo el cero en el punto 1) o como un filtro pasa-bajos (poniendo el cero a -1). La respuesta a la frecuencia de estos filtros es muy contundente; en otras palabras, las regiones de transición son amplias. Con frecuencia es deseable un filtro más nítido, sea de realce, pasa-altos o bajos, cuyas dos bandas sean más planas y separadas por una región de transición más estrecha. Un procedimiento prestado del mundo de los filtros análogos transforma filtros de un polo y un cero a sus correspondientes *filtros Butterworth*, los cuales poseen regiones de transición más estrechas. Este procedimiento se describe clara y elegantemente en [Ste96]. La derivación utiliza más conocimientos matemáticos que los que hemos desarrollado aquí, y simplemente presentaremos el resultado, sin derivarlo.

Para hacer un filtro Butterworth pasa-altos, pasa-bajos o filtro de realce, suponga que tanto el polo como el cero están dados por la expresión

$$(1 - r^2)/(1 + r^2)$$

donde r es un parámetro con rango de 1 a ∞. Si $r = 0$ este es el punto 1, y si

$r = \infty$ es -1.

Entonces, por razones que quedarán en el misterio, reemplazaremos el punto (ya sea polo o cero) por n puntos dados por:

$$[(1 - r^2) - (2r\text{sen}(\alpha))i]/[1 + r^2 + 2r\text{sen}(\alpha)]$$

donde el rango de α está sobre los valores:

$$(\pi/2)(1/n - 1), (\pi/2)(3/n - 1),...,(\pi/2)((2n - 1)/n - 1)$$

En otras palabras, α queda en n ángulos igualmente espaciados entre $-\pi/2$ y $\pi/2$. Los puntos están organizados en el plano complejo como se muestra en la figura 8.17. Ellos están sobre un círculo que cruza el punto de valor real original, que corta a su vez el círculo unitario en ángulos rectos.

Un buen estimado para la frecuencia de corte o de transición definida por estas colecciones circulares de polos o ceros es sencillamente el punto donde el círculo intersecta al círculo unitario, correspondiendo a $\alpha = \pi/2$. Esto da el punto

$$[(1 - r^2) - 2ri]/(1 + r^2)$$

el cual, luego de algo de álgebra, da una frecuencia angular igual a

$$\beta = 2\arctan(r)$$

La figura 8.18 (parte a) muestra un diagrama de polo cero y respuesta a la frecuencia para un filtro pasa-bajos Butterworth con tres polos y tres ceros. La parte (b) muestra la respuesta a la frecuencia del filtro pasa-bajos y de los otros tres filtros que se obtiene al escoger diferentes valores de β (y por lo tanto de r) para los ceros, mientras deja los polos estacionarios. Mientras los ceros progresan de $\beta = \pi$ a $\beta = 0$, el filtro, que comienza como un filtro pasa-bajos, se convierte en un filtro de realce y luego en uno pasa-altos.

8.3.7 Estirando el círculo unitario con funciones racionales

En la sección 8.3.4 vimos una forma simple de convertir un filtro pasa-bajos en uno pasa-banda. Es tentador aplicar el mismo método para convertir nuestro filtro pasa-bajos Butterworth en un filtro pasa-banda de alta calidad; pero si queremos preservar la alta calidad del filtro Butterworth debemos ser más cuidadosos que antes en el diseño de la transformación utilizada. En esta sección prepararemos la manera de fabricar el filtro Butterworth pasa-banda usando un tipo de transformaciones racionales del plano complejo, las cuales preservan el círculo unitario.

Esta discusión es adaptada de [PB87], págs.201-206 (estoy agradecido con Julius Smith por este punto). Aquí la transformación es llevada en el tiempo continuo, pero hemos adaptado el método para operar en el tiempo discreto, con el fin de hacer una discusión auto-contenida.

La idea es comenzar con cualquier filtro con una función de transferencia como se vio anteriormente:

$$H(Z) = [(1 - Q_1Z^{-1})...(1 - Q_jZ^{-1})]/[(1 - P_1Z^{-1})...(1 - P_kZ^{-1})]$$

cuya respuesta a la frecuencia (la ganancia a la frecuencia ω) está dada por:

$$|H(\cos(\omega) + i\text{sen}(\omega))|$$

Suponga ahora que podemos encontrar una función racional, $R(Z)$, que distorsiona el círculo unitario de una manera deseable. Que R sea una función racional significa que puede escribirse como el cociente de dos polinomios (por ejemplo la función H es una función racional). Que R envíe puntos sobre el círculo unitario a otros puntos sobre el mismo círculo unitario es precisamente la condición de que $|R(Z)| = 1$ siempre que $Z = 1$. Puede comprobarse fácilmente que cualquier función de la forma

$$R(Z) = U \bullet (A_n Z^n + A_{n-1} Z^{n-1} + ... + A_0)/(\overline{A}_0 Z^n + \overline{A}_1 Z^{n-1} + \ldots + \overline{A}_n)$$

(donde $|U| = 1$) tiene esta propiedad. El mismo razonamiento de la sección 8.2.2 confirma que $|R(Z)| = 1$ siempre que $Z = 1$.

Una vez tenemos una función racional apropiada R, podemos simplemente componer esta con la función de transferencia original H para fabricar una nueva función racional,

$$J(Z) = H(R(Z))$$

La ganancia del nuevo filtro J en la frecuencia ω es entonces igual a la de H a una diferencia de frecuencia ϕ, escogida de tal manera que:

$$\cos(\phi) + i\mathrm{sen}(\phi) = R(\cos(\omega) + i\mathrm{sen}(\omega))$$

La función R mueve puntos alrededor del círculo unitario; J en cualquier punto es igual a H sobre el punto R que lo mueve.

Por ejemplo, suponga que comenzamos con un filtro pasa-bajos de un cero y un polo:

$$H(Z) = (1 + Z^{-1})/(1 - gZ^{-1})$$

y aplicamos la función

$$R(Z) = -Z^2 = -(1 \bullet Z^2 + 0 \bullet Z + 0)/(0 \bullet Z^2 + 0 \bullet Z + 1)$$

Geométricamente esta opción de R estira el círculo unitario uniformemente a dos veces su circunferencia y lo envuelve completamente dos veces. Los puntos 1 y -1 son enviados ambos al punto -1, y los puntos i y $-i$ son enviados al punto 1. La función de transferencia resultante es

$$J(Z) = (1 + Z^{-2})/(1 - gZ^{-2})$$

$$= [(1 - Z^{-1})(1 + Z^{-1})]/[(1 - i\sqrt{g}Z^{1})(1 + i\sqrt{g}Z^{1})]$$

Las gráficas del polo cero de H y J se muestran en la figura 8.19. Partiendo de un filtro pasa-bajos terminamos con un filtro pasa-banda. Los puntos i y $-i$ a los cuales R envía a 1 (donde la ganancia del filtro original es la más alta) se convierten en los puntos de más alta ganancia para el nuevo filtro.

8.3.8 Filtro Butterworth pasa-banda

Podemos aplicar la transformación $R(Z) = -Z^2$ para convertir el filtro Butterworth en un filtro pasa-banda de alta calidad con centro de frecuencia $\pi/2$. Una transformación adicional puede aplicarse después para cambiar el centro de frecuencia a cualquier valor ω deseado entre 0 y π. La transformación será de la forma,

$$S(Z) = (aZ + b)/(bZ + a)$$

donde a y b son números reales y ninguno es cero. Este es un caso particular de la forma general dada anteriormente para las funciones racionales que preservan el círculo unitario. Tenemos $S(1) = 1$ y $S(-1) = -1$, y las mitades superior e inferior del círculo unitario son transformadas simétricamente (si Z va a W entonces $\overline{Z}$ va a $\overline{W}$). El efecto cualitativo de la transformación S es aplastar los puntos del círculo unitario hacia 1 o -1.

En particular, dado un centro de frecuencia ω deseado, queremos escoger S de tal manera que:

$$S(\cos(\omega) + i\,\mathrm{sen}(\omega)) = i$$

Si hacemos $R = -Z^2$ como antes, y dejamos que H sea la función de transferencia para un filtro pasa-bajos Butterworth, entonces el filtro combinado con la función de transferencia $H(R(S(Z)))$ será un filtro pasa-banda con centro de frecuencia ω. Al resolver para a y b da:

$$a = \cos(\pi/4 - \omega/2),\ b = \mathrm{sen}(\pi/4 - \omega/2)$$

La nueva función de transferencia, $H(R(S(Z)))$, tendrá $2n$ polos y $2n$ ceros (siendo n el grado del filtro Butterworth H).

Conocer la función de transferencia es bueno, pero es mucho mejor conocer la localización de todos los polos y ceros del nuevo filtro, los cuales requerimos poder computar usando filtros elementales. Si Z es un polo de la función de transferencia $J(Z) = H(R(S(Z)))$, esto es, si $J(Z) = \infty$, entonces $R(S(Z))$ debe ser un polo de H. Lo mismo para los ceros. Para encontrar un polo o cero, sea $R(S(Z)) = W$, donde W es un polo o un cero de H, y resuelve para Z. Esto da:

$$-[(aZ + b)/(bZ + a)]^2 = W$$

$$(aZ + b)/(bZ + a) = \pm\sqrt{-W}$$

$$Z = (\pm a\sqrt{-W} - b)/(\mp b\sqrt{-W} + a)$$

(Aquí a y b están tal cual se dieron antes y utilizamos el hecho de que $a^2 + b^2 = 1$). Un ejemplo de un gráfico de polo-cero y de respuesta a la frecuencia de J se muestra en la figura 8.20.

8.3.9 Coeficientes que varían con el tiempo

En algunos diseños de filtro recursivos, cambiar los coeficientes del filtro puede inyectar energía al sistema. Una analogía física es la de un niño en su columpio. El niño oscila hacia atrás y hacia adelante con la frecuencia de resonancia del sistema, y empujar o halar del niño inyecta o extrae energía del sistema suavemente. Sin embargo, si usted decide acortar la cadena o mover el columpio usted mismo, puede inyectar una cantidad impredecible de energía al sistema. Lo mismo sucede cuando usted cambia los coeficientes en un filtro resonante con recirculación.

Los filtros simples de un polo y un cero utilizados aquí no tienen esta dificultad; si la ganancia de retroalimentación o de ante-alimentación es cambiada suavemente (en el sentido de una envolvente de amplitud) la salida se comportará también de manera suave. Pero una sutileza aparece al tratar de normalizar la salida de un filtro recursivo, cuando la ganancia de retroalimentación es cercana a uno. Por ejemplo, suponga que tenemos un filtro pasa-bajos de un polo con ganancia 0.99 (para una frecuencia de corte de 0.01 radianes, o 70 Hertz a la velocidad de muestras que es usual). Para normalizarlo para una unidad de ganancia en DC, multiplicamos por 0.01. Suponga que ahora queremos el doble de la frecuencia de corte cambiando la ganancia ligeramente a 0.98. Esto está bien, excepto que el factor de normalización súbitamente se dobla. Si multiplicamos la salida del filtro por el factor de normalización, la salida súbitamente, pero sólo por un momento, saltará a un factor de dos.

El truco es normalizar *a la entrada* del filtro, no a la salida. La figura 8.21 (parte a) muestra un filtro con recirculación complejo, con ganancia de retroalimentación P, normalizado a la entrada por 1 - $|P|$, de tal forma que el pico de ganancia es uno. La parte (b) muestra la manera incorrecta de hacerlo, multiplicando a la salida.

Las cosas se vuelven más complicadas cuando varios filtros elementales con recirculación se ponen en serie, ya que el factor de normalización correcto está, en general, en función de todos los coeficientes. Una aproximación posible es que cuando se vaya a cambiar rápidamente algún filtro, normalizar cada entrada por separado, y multiplicar luego la salida, finalmente, por la corrección que se necesite posteriormente.

8.3.10 Respuesta al impulso de los filtros con recirculación

En la sección 7.4 analizamos la respuesta al impulso de un filtro peine con recirculación, del cual el filtro pasa-bajos de un polo es un caso especial. La figura 8.22 muestra el resultado para dos filtros pasa-bajos y un filtro resonante complejo de un polo. Todos son filtros elementales con recirculación como los introducidos en la sección 8.2.3. Cada uno está normalizado para tener una unidad de ganancia como máximo.

En el caso de un filtro pasa-bajos, la respuesta al impulso se alarga (y desciende) cuando el polo se acerca más a uno. Suponga que el polo está en un punto $1 - 1/n$ (de tal forma que la frecuencia de corte es $1/n$ radianes). El factor de normalización es también $1/n$. Después de n puntos, la salida disminuye por un factor de

$$(1 - 1/n)^n \approx 1/e$$

donde e es la constante de Euler, aproximadamente 2.718. Se puede decir que el filtro tiene un *ajuste de tiempo* de n muestras. En la figura $n = 5$ para la parte (a) y $n = 10$ para la parte (b). En general, el ajuste del tiempo (en muestras) es aproximadamente uno sobre la frecuencia de corte (en unidades angulares).

La situación se vuelve más interesante cuando miramos un filtro resonante de un polo, esto es, uno cuyo polo está sobre el eje real. En la parte (c) de la figura, el polo P tiene un valor absoluto de 0.9 (como en la parte b), pero su argumento se ajusta a $2\pi/10$ radianes. Obtenemos el mismo ajuste de tiempo de la parte (b), pero la salida timbra a la frecuencia de resonancia (y de esta manera a un periodo de 10 muestras en este ejemplo).

Una pregunta natural es cuántos períodos de timbrado obtenemos antes de que el filtro decaiga a una fuerza de $1/e$? Si el polo de un filtro resonante tiene una magnitud de $1 - 1/n$ como se muestra arriba, vimos en la sección 8.2.3 que el ancho de banda (llamado b) es aproximadamente $1 - 1/n$, y vemos aquí que el ajuste de tiempo es aproximadamente n. La frecuencia de resonancia (llamada ω) es el argumento del polo, y el período en muestras del timbrado es $2\pi/\omega$. El número de períodos que hacen el ajuste de tiempo es, de esta manera:

$$n/(2\pi/\omega) = (1/2\pi)(\omega/b) = q/2\pi$$

donde q es la calidad del filtro, definida como el centro de frecuencia dividida por el ancho de banda. Los filtros resonantes están usualmente especificados en términos del centro de frecuencia y de "q", en lugar del ancho de banda.

8.3.11 Filtros pasa-todo

A veces un filtro se aplica para obtener un cambio de fase deseado, en lugar de alterar las amplitudes de los componentes de la frecuencia de un sonido. Para hacer esto podríamos necesitar una manera de diseñar filtros con una respuesta a la frecuencia constante unitaria, pero que cambie la fase de una sinusoide de entrada de una manera que dependa de su frecuencia. Ya vimos en el capítulo 7 que un retraso de longitud d introduce un cambio de fase de $-d\omega$, a una frecuencia angular ω. Otro tipo de filtros llamados filtros pasa-todo, puede hacer cambios de fase, las cuales pueden ser las funciones más interesantes de ω.

Para diseñar un filtro pasa-todo, comenzamos con dos hechos: primero un filtro elemental con recirculación y uno elemental sin recirculación se cancelan entre sí si tienen el mismo coeficiente de ganancia. En otras palabras, si una señal pasa a través de un filtro de un cero, ya sea real o compleja, el efecto puede revertirse al aplicarse secuencialmente un filtro de un polo, y viceversa.

El segundo hecho es que un filtro elemental sin recirculación, de la segunda forma tiene la misma respuesta a la frecuencia que el de la primera forma; ellos sólo difieren en la respuesta a la fase. Así si combinamos un filtro elemental con recirculación con otro elemental sin recirculación de la segunda forma, las respuestas a la frecuencia se cancelan (para una ganancia plana independiente de la frecuencia) pero la respuesta a la fase no es constante.

Para encontrar la función de transferencia, escogemos el mismo número complejo $P < 1$ como coeficiente para ambos filtros elementales y multiplicamos sus funciones de transferencia:

$$H(Z) = (\overline{P} - Z^{-1})/(1 - PZ^{-1})$$

El coeficiente P controla tanto la ubicación de un polo (en P mismo) y la del cero (en $1/\overline{P}$). la figura 8.23 muestra la respuesta a la fase del filtro pasa-todo para cuatro opciones de valor real del coeficiente p. En las frecuencias 0, π y 2π la respuesta a la fase es precisamente la de un retraso de una muestra; pero para las frecuencias en el medio, la respuesta a la fase es curvada hacia arriba o hacia abajo dependiendo del coeficiente.

Los coeficientes complejos dan curvas de respuesta a la fase similares, pero las frecuencias a las cuales ellos cruzan la línea diagonal en la figura es cambiada según el argumento del coeficiente P.

8.4 Aplicaciones

Los filtros son utilizados en un amplio rango de aplicaciones tanto en la ingeniería del audio como en la música electrónica. La primera incluye, por ejemplo, ecualizadores, divisores de frecuencia de parlantes, convertidores de velocidades de muestras, y supresores de componentes DC (que ya utilizamos en los primeros capítulos). Aquí sin embargo, nos ocuparemos de las aplicaciones específicamente musicales.

8.4.1 Síntesis sustractiva

La síntesis sustractiva es una técnica que utiliza filtros para dar forma a la envolvente espectral de un sonido, formando otro sonido, usualmente preservando las cualidades del sonido original tales como su afinación, su dureza, lo ruidoso, o lo granuloso de este. La envolvente espectral del sonido resultante es el producto de la envolvente del sonido original con la respuesta a la frecuencia del filtro. La figura 8.24 muestra una configuración posible de la fuente, el filtro, y el resultado.

El filtro puede ser constante o variante en el tiempo. Siendo ya ampliamente utilizada a mediados de la década de 1950, la síntesis sustractiva tuvo su auge con la introducción del filtro controlado por voltaje (VCF), el cual estuvo ampliamente disponible en a mediados de la década de 1960 con la aparición de la síntesis modular. Un VCF típico tiene dos entradas: una para el sonido que se va a filtrar y otra para variar la frecuencia central o de corte.

Un uso popular de un VCF es controlar el centro de frecuencia de un filtro resonante del mismo generador ADSR que controla la amplitud; un posible diagrama de bloques se muestra en la figura 8.25. En esta configuración, la porción con mayor volumen de una nota (el volumen controlado de manera aproximada por el multiplicador de la parte inferior) puede también hacerse sonar más brillante, utilizando el filtro, que las partes más silenciosas; esto puede simular la evolución espectral de las cuerdas o de los instrumentos de viento metal durante la vida de una nota.

8.4.2 Seguidor de envolvente

Es con frecuencia deseable utilizar la potencia variable en el tiempo de una señal de entrada para disparar o controlar un proceso musical. Para hacer esto necesitaremos un proceso para medir la potencia de una señal de audio. Ya que la mayoría de las señales de audio pasan por el cero muchas veces por segundo, no será suficiente tomar valores instantáneos de la señal para medir su potencia; en lugar de eso, debemos calcular la potencia promedio en un intervalo de tiempo lo suficientemente largo para que sus variaciones no vayan a mostrar incremento en la potencia estimada, pero lo suficientemente corto como para que los cambios en la señal sean reportados rápidamente. Un proceso de cómputo que provea un estimado de la variación de la potencia en el tiempo de una señal es llamado un *seguidor de envolvente*.

La salida de un filtro pasa-bajos puede ser vista como un movimiento promedio de su entrada. Por ejemplo, suponga que aplicamos un filtro pasa-bajos de un polo normalizado con coeficiente p, como en la figura 8.21, a una señal de entrada $x[n]$. La salida (llamada $y[n]$) es la suma de la salida retrasada p veces, con la entrada $1 - p$ veces:

$$y[n] = p \cdot y[n-1] + (1 - p) \cdot x[n]$$

de tal manera que cada entrada está promediada, con peso $1 - p$, en la salida previa para producir una nueva salida. De tal manera que usted puede hacer un movimiento promedio del cuadrado de una señal de audio utilizando el diagrama de la figura 8.26. La salida es un promedio que varía en el tiempo, de la potencia instantánea $x[n]^2$, y el diseño del filtro pasa-bajos controla, entre otras cosas, el ajuste del tiempo del movimiento promedio.

Para adentrarnos más en el diseño de un filtro pasa-bajos apropiado para un seguidor de envolvente, lo analizamos desde el punto de vista del espectro de la señal. Si, por ejemplo, ponemos una sinusoide de valor real:

$$x[n] = a \cdot \cos(\alpha n)$$

el resultado de su cuadrado es:

$$x[n]^2 = (a^2/2)(\cos(2\alpha n) + 1)$$

y así, si el filtro pasa-bajos detiene efectivamente el componente de frecuencia 2α obtendremos aproximadamente la constante $a^2/2$ la cual es en realidad la potencia promedio.

La situación para señales con varios componentes es similar. Suponga que la señal de entrada es ahora,

$$x[n] = a \cdot \cos(\alpha n) + b \cdot \cos(\beta n)$$

cuyo espectro es graficado en la figura 8.27 (parte a). (Hemos omitido los dos términos de las fases, pero no tendrán efecto en el resultado.) Al elevar al cuadrado la señal, se produce el espectro mostrado en la parte (b) (ver sección 5.2).) Podemos obtener el valor fijo deseado de $(a^2 + b^2)/2$ simplemente filtrando todos los demás componentes; idealmente el resultado será una señal constante DC. En tanto filtremos todos los parciales, además de las diferencias de afinación, lograremos una salida estable que estima correctamente la potencia promedio.

Los seguidores de envolventes pueden ser utiliados también en señales ruidosas, las cuales pueden pensarse como señales con espectros densos. En esta situación habrá diferencias de frecuencias arbitrariamente cercanas a cero, y filtrarlas por completo será imposible; siempre tendremos fluctuaciones a la salida, pero ellas decrecerán proporcionalmente en tanto la banda de paso se estrecha.

8.4.3 Modulación simple de banda lateral

Tal como lo vimos en el capítulo 5, al multiplicar dos sinusoides reales tenemos como resultado una señal con dos componentes nuevos que son la suma y la diferencia de las frecuencias originales. Si llevamos a cabo la misma operación con sinusoides complejas, obtenemos únicamente una nueva frecuencia resultante; este es un resultado de la mayor simplicidad matemática de las sinusoides complejas comparadas con las reales. Si multiplicamos una sinusoide compleja $1, Z, Z^2, \ldots$ con otra $1, W, W^2, \ldots$ el resultado es $1, ZW, (ZW)^2, \ldots$ la cual es otra sinusoide compleja cuya frecuencia, $\angle(ZW)$, es la suma de las dos frecuencias originales.

En general, ya que las sinusoides complejas tienen propiedades más simples que las reales, es con frecuencia útil hacer la conversión de una sinusoide real a una compleja. En otras palabras, de la sinusoide real:

$$x[n] = a \cdot \cos(\alpha n)$$

(con un pico espectral de amplitud $a/2$ y frecuencia ω) quisiéramos una manera de computar la sinusoide compleja:

$$X[n] = a(\cos(\omega n) + i \operatorname{sen}(\omega n))$$

de tal manera que

$$x[n] = \operatorname{re}(X[n])$$

Quisiéramos un proceso lineal para hacer esto, de tal manera que la superposición de las sinusoides sea lleve a cabo como si estuvieran separadas.

Por supuesto hubiéramos podido escoger las sinusoides complejas igualmente con frecuencia $-\omega$:

$$X'[n] = a(\cos(\omega n) - i \operatorname{sen}(\omega n))$$

y en efecto $x[n]$ es precisamente la mitad de la suma de las dos. En escencia necesitamos un filtro que pase a través de las frecuencias positivas (en realidad las frecuencias entre 0 y π, corresponden a los valores de Z en la mitad superior del círculo unitario complejo)

Uno puede diseñar un filtro así diseñando un filtro pasa-bajos con frecuencia de corte $\pi/2$, y luego ejecutar una rotación por $\pi/2$ radianes utilizando la técnica de la sección 8.3.4. Sin embargo puede hacerse más fácilmente usando dos redes de filtros pasa-bajos especialmente diseñada, con coeficientes reales.

Llamando la función de transferencia de los dos filtros H_1 y H_2 diseñamos los filtros de tal manera que

$$\angle(H_1(Z)) - \angle(H_2(Z)) \approx \begin{cases} \pi/2 & 0 < \angle(Z) < \pi \\ -\pi/2 & -\pi < \angle(Z) < 0 \end{cases}$$

o en otras palabras

$$H_1(Z) \approx iH_2(Z),\ 0 < \angle(Z) < \pi$$

$$H_2(Z) \approx -iH_2(Z),\ -\pi < \angle(Z) < 0$$

Luego, para cualquier señal de entrada de valor real $x[n]$ simplemente formamos un número complejo $a[n] + ib[n]$ donde $a[n]$ es la salida del primer filtro y $b[n]$ es la salida del segundo. Cualquier componente sinusoidal complejo de $x[n]$ (llamado Z^n) será transformado a:

$$H_1(Z) + iH_2(Z) \approx \begin{cases} 2H_1(Z) & 0 < \angle(Z) < \pi \\ 0 & \text{para los demás valores} \end{cases}$$

Habiendo comenzado con una señal de valor real, cuya energía es dividida por igual en frecuencias positivas y negativas, terminamos con una de valor real con sólo frecuencias positivas.

8.5 Ejemplos

En esta sección introducimos primero algunos filtros prefabricados fáciles de usar disponibles en Pd para desarrollar ejemplos que muestren aplicaciones de la sección previa. Luego mostraremos algunas aplicaciones más sofisticadas que requieren de filtros especialmente diseñados.

Filtros pasa-altos, pasa-bajos y pasa-banda prefabricados

Los parches H01.low-pass.pd, H02.high-pass.pd y H03.band-pass.pd (fgura 8.28) muestran filtros de Pd, que implementan diseños de filtros descritos en las secciones 8.3.1, 8.3.2 y 8.3.4. Dos de los parches usan también un generador de ruido que no hemos introducido anteriormente. Necesitaremos de cuatro nuevos objetos Pd:

lop~: filtro pasa-bajos de un polo. La entrada izquierda toma una señal que se va a filtrar, y la entrada derecha toma los mensajes de control para ajustar la frecuencia de corte del filtro. El filtro está normalizado de tal manera que la ganancia es uno cuando la frecuencia es 0.

hip~: filtro pasa-altos de un polo y un cero, con las mismas entradas y salidas de lop~, normalizado para tener ganancia uno a la frecuencia de Nyquist.

bp~: filtro resonante. La entrada de la mitad toma mensajes de control para ajustar el centro de frecuencia, y la entrada de la derecha para ajustar "q".

noise: generador de ruido blanco. Cada muestra es un número seudo-aleatorio, distribuidos uniformemente de -1 a 1.

Los primeros tres parches de los ejemplos muestran estos tres filtros (ver la figura 8.28). los objetos lop~ y bp~ se demuesran con ruido en su entrada; hip~

se muestra removiendo el componente DC (frecuencia cero) de una señal.

Filtro pasa-banda variante en el tiempo, prefabricado

El filtrado pasa-banda variante en el tiempo, tal como se utiliza con frecuencia en la síntesis sustractiva clásica (sección 8.4.1), puede hacerse utilizando el objeto vcf~, introducido aquí:

vcf~: un filtro pasa-banda “controlado por voltaje”, similar a bp~, pero con una señal de entrada para controlar el centro de frecuencia. Tanto bp~ como vcf~ son filtros resonantes de un polo como los desarrollados en la sección 8.3.4; bp~ tiene como salida la parte real de la señal resultante, mientras que vcf~ tiene a la salida las partes real e imaginaria por separado.

El ejemplo H04.filter.sweep.pd (figura 8.29) demuestra el uso del objeto vcf~ para una tarea simple y característica de síntesis sustractiva. Un objeto phasor~ (en la parte superior) crea una onda diente de sierra para filtrar. (Esta no es en especial una buena práctica ya que no estamos controlando la posibilidad del sobre-doblado; un mejor generador de onda diente de sierra para este propósito será desarrollado en el capítulo 10.) El segundo objeto phasor~ (etiquetado “LFO for sweep”) controla el centro de frecuencia variable en el tiempo. Después de hacer los ajustes para la profundidad y un centro de frecuencia base (dado en unidades MIDI), el resultado se convierte Hertz (usando el objeto tabread4~ <en el parche no está la tabla “mtof” y por eso no funciona; en el parche siguiente, H05.filter.floyd.pd se encuentra el subparche pd conversion-tables que contiene la tabla; copiar y pegar...>) y es pasado a vcf~ para ajustar su centro de frecuencia. Otro ejemplo del uso del objeto vcf~ para la síntesis sustractiva se demuestra en el ejemplo H05.filter.floyd.pd.

Seguidores de envolvente

El ejemplo H06.envelope.follower.pd muestra una simple y didáctica realización del seguidor de envolvente descrita en la sección 8.4.2. Una aplicación interesante del seguidor de envolvente se muestra en el ejemplo H07.measure.spectrum.pd (figura 8.30, parte a). Una muestra famosa de una campana es ejecutada en lazo como sonido de chequeo. En lugar de obtener la media cuadrática general de la potencia, nos gustaría estimar la potencia y la frecuencia de cada uno de sus parciales. Para hacer esto movemos un filtro pasa-bajos arriba y abajo en la frecuencia, escuchando el resultado y/o mirando la potencia de salida del filtro utilizando un seguidor de envolvente. (Utilizamos dos filtros pasa-banda en serie para un mejor aislamiento de los parciales; este no es un diseño especialmente bueno de filtro, pero trabajará en este contexto.) Cuando el filtro es afinado en un parcial, el seguidor de envolvente reporta su fortaleza.

El ejemplo H08.heterodyning.pd (parte (b) de la figura) muestra una manera alternativa para mostrar los parciales de una señal de entrada; tiene la ventaja de reportar la fase así como la fortaleza. Primero modulamos el parcial deseado a cero frecuencia. Utilizamos una sinuside de valor complejo como un modulador, de tal manera que obtenemos sólo una banda lateral por cada componente de la entrada. La frecuencia de chequeo es la única frecuencia que se modula a DC; las demás van a otras partes. Luego hacemos pasa-bajos de la señal compleja resultante. (Podemos utilizar un filtro pasa-bajos de valor real por separado para las partes real e imaginaria.) Este remueve escencialmente todos los parciales exceptuando el DC, el cual luego recolectamos. Esta técnica es la base del análisis de Fourier, materia del capítulo 9.

Modulación de banda lateral simple

Como se describió en la sección 8.4.3, un par de filtros pasa-todo pueden ser construidos para dar aproximadamente $\pi/2$ de fase de diferencia para frecuencias positivas y $-\pi/2$ para las negativas. El diseño de estos pares está más allá del objetivo de esta discusión (ver por ejemplo, [Reg93]) pero Pd provee una abstracción, hilbert~, para hacer esto. El ejemplo H09.ssb.modulation.pd, mostrado en la figura 8.31, demuestra cómo utilizar la abstracción hilbert~ para hacer la modulación de banda lateral de una señal. La transformación Hilbert data de la era análoga [Str95, págs.129-132].

Las dos salidas de hilbert~, consideradas como las partes real e imaginaria de una señal de valor complejo, son multiplicadas por una sinusoide (a la derecha en la figura), y la parte real es la salida. Los componentes de la señal resultante son aquellos de la entrada cambiados por una frecuencia (positiva o negativa) que se especifica en la caja de números.

Utilizando filtros elementales: de realce y de pico

No hay un conjunto finito de filtros que pudiera llenar todas las necesidades posibles, y por eso Pd provee los filtros elementales de las secciones 8.2.1-8.2.3 en forma no elaborada, de tal manera que el usuario pueda suministrar los coeficientes del filtro explícitamente. En esta seccion describiremos parches que realizan los filtros de realce y de pico de las secciones 8.3.3 y 8.3.5 directamente desde los filtros elementales. Primero introducimos los seis objetos Pd que realizan los filtros elementales:

rzero~, rzero_rev~, rpole~: filtros elementales con coeficientes de valor real operando en señales de valor real. Los tres implementan filtros sin recirculación del primer y segundo tipo, y el filtro con recirculación. Todos ellos tienen una entrada, a la derecha, para suministrar el coeficiente que ajusta la localización del cero o del polo. La entrada para el coeficiente (así como la entrada izquierda de la señal a filtrar) toma señales de audio. No se ejecuta examen de estabilidad.

czero~, czero_rev~, cpole~: filtros elementales con coeficientes de valor complejo, operando sobre señales de valor complejo, correspondientes a los anteriores de valor real. En lugar de dos entradas y de una salida, cada uno de estos filtros tiene cuatro entradas (partes real e imaginaria de la señal a filtrar, y partes real e imaginaria del coeficiente) y dos salidas para la señal compleja de salida.

Los parches de los ejemplos utilizan un par de abstracciones para graficar la respuesta a la frecuencia y a la fase de los filtros según se explicó en el ejemplo H10.measurement.pd. El ejemplo H11.shelving.pd (figura 8.32, parte a) muestra cómo fabricar un filtro shelving. Un filtro elemental sin recirculación (rzero~) y uno elemental con recirculación (rpole~) se ponen en serie. Como podría sugerir el análisis de la sección 8.3.9, el objeto rzero~ es colocado de primero.

El ejemplo H12.peaking.pd (parte (b) de la figura) implementa un filtro pico. Aquí el polo y el cero son rotados por un ángulo ω para controlar el centro de frecuencia del filtro. La ganancia del ancho de banda y del centro de frecuencia son iguales a la ganancia de la frecuencia de realce y del DC del filtro de realce correspondiente.

El ejemplo H13.butterworth.pd demuestra un filtro Butterworth de realce, de tres polos y tres ceros. El filtro mismo es una abstracción, butterworth3~, para reutilizar con facilidad.

Haciendo y utilizando filtros pasa-todo.

El ejemplo H14.all.pass.pd (la figura 8.33, parte a) muestra cómo fabricar un filtro pasa-todo, partiendo de un filtro sin recirculación de la segunda forma (rzero_rev~) y un filtro con recirculación (rpole~). El coeficiente, que va de -1 a 1, está controlado en centésimos.

El ejemplo H15.phaser.pd (parte b de la figura) muestra cómo utilizar cuatro filtros pasa-todo para hacer un fasor clásico. El fasor trabaja sumando la señal de entrada con una versión de fase alterada de este, haciendo efectos de interferencia. La cantidad de cambio de la fase es variada en el tiempo al variar el coeficiente (compartido) de los filtros pasa-todo. El efecto general es algo similar a un flanger (filtro peine variable en el tiempo) pero el fasor no impone una afinación como lo hace el filtro peine.

Ejercicios

1. Un filtro elemental con recirculación tiene un polo en $i/2$. A qué frecuencia angular está su mayor ganancia, y cuál es su valor? A qué frecuencia es su ganancia más baja y cuál es su valor?

2. Un filtro de realce tiene un polo en 0.9 y un cero en 0.8. Cuáles son: la ganancia DC; la ganancia en la frecuencia de Nyquist; la frecuencia de transición aproximada?

3. Suponga que un filtro con recirculación complejo tiene un polo en P. Suponga además que usted quiere combinar su salida real e imaginaria para fabricar una señal única, de valor real equivalente a la de un filtro con dos polos en P y en $\overline{P}$. Cómo debería usted ponderar las dos salidas?

4. Suponga que desea diseñar un filtro pico con ganancia 2 a 1000 Hertz y ancho de banda de 200 Hertz (a una velocidad de muestras de 44100 Hertz). Dónde, aproximadamente debería poner el polo y el cero superiores?

5. En la misma situación, dónde debería poner el polo y el cero (superiores) para remover una sinusoide a 1000 Hertz por completo, mientras atenúa sólo 3 decibeles en los 1001 Hertz?

6. Un filtro complejo de un polo es excitado por un impulso para fabricar un sonido a 1000 Hertz, el cual decae 10 decibeles en un segundo (a una velocidad de muestras de 44100 Hertz). Dónde debería ubicar el polo? Cuál es el valor de “q”?