Capítulo 5

Modulación

Habiendo tomado un recorrido de dos capítulos al interior de los aspectos de control y de la organización en la música electrónica, retornamos a la descripción de la síntesis de audio y las técnicas de procesamiento. Ya hemos visto métodos aditivos y de tabla de ondas. En este capítulo introduciremos tres técnicas de las llamadas “*modulación*”: *modulación de la amplitud*, *modulación de la frecuencia* y *conformación de ondas*. El término “modulación” se refiere de manera muy general a cualquier técnica que sistemáticamente altere la forma de una onda, curvando su gráfica vertical u horizontalmente. La modulación se utiliza de manera amplia para la construcción de sonidos con varias familias de *espectros*, para lo cual debemos desarrollar alguna terminología antes de ir a las técnicas.

5.1 Taxonomía de los espectros

La figura 5.1 muestra una manera de visualizar el *espectro* de una señal de audio. El espectro describe, hablando en términos generales, cómo está distribuida en frecuencias la potencia de la señal. (Se pueden dar definiciones más precisas que la que se da aquí, pero requieren de más conocimiento matemático).

La parte (a) de la figura muestra el espectro de una señal armónica, la cual es una señal periódica cuya frecuencia fundamental está en el rango de las afinaciones perceptibles, aproximadamente entre 50 y 4000 Hertz. Las series de Fourier (página “12”) dan una descripción de una señal periódica como una suma de sinusoides. Las frecuencias de estas sinusoides están en relación 0 : 1 : 2 ... (El término constante en las series de Fourier puede ser pensado como una sinusoide,

$$a_0 = a_0 \cos(0 \bullet \omega n),$$

cuya frecuencia es cero.)

En una señal armónica la potencia mostrada en el espectro está concentrada en un subconjunto pequeño de ejes de frecuencia (un conjunto discreto consiste de muchos puntos aislados, sólo en cantidad finita, y en un intervalo cualquiera delimitado). Llamamos a esto un espectro *discreto*. Aún más, las frecuencias donde la potencia de la señal está en razones 0 : 1 : 2... son las que aparecen de una señal periódica. (No es necesario que todos los armónicos de la frecuencia estén presentes; algunos armónicos pueden tener amplitud cero.) Para una señal armónica el gráfico del espectro muestra las amplitudes de los parciales de las señales. Conociendo las amplitudes y las fases de todos los parciales se determina completamente la señal original.

La parte (b) de la figura muestra un espectro que también es discreto, de tal manera que la señal puede considerarse de nuevo como una suma de series de parciales. En este caso, sin embargo, no hay frecuencia fundamental, es decir, no hay un submúltiplo común de todos los parciales. Esta es llamada una señal inarmónica. (Los términos armónico e inarmónico pueden utilizarse para describir tanto las señales como su espectro.)

Cuando tratamos con el espectro discreto, reportamos la amplitud de un parcial en una forma ligeramente no intuitiva. Cada componente sinusoidal,

$$a \cos(\omega n + \phi)$$

cuenta únicamente como si tuviera amplitud $a/2$ en tanto que la frecuencia angular ω es no cero. Pero para un componente de frecuencia cero, para el cual $\omega = \phi = 0$, la amplitud está dada por a -sin dividirla por 2. (Los componentes con frecuencia cero son llamados usualmente componentes *DC*; "DC" es históricamente un acrónimo de "direct current" <"corriente directa">). Estas convenciones para las amplitudes en los espectros simplificarán más tarde las matemáticas en este capítulo; una razón profunda para estas se dará en el capítulo 7.

La parte (c) de la figura muestra una tercera posibilidad: el espectro podría no estar concentrado en un conjunto discreto de frecuencias, si no que podría estar disperso entre todas las frecuencias posibles. Este puede ser llamado un espectro *continuo* o *de ruido*. Los espectros no necesariamente caen en categorías continuas o discretas; los sonidos reales, en particular, están usualmente entre ambos.

Cada una de las tres partes de la figura muestra una curva continua llamada *envolvente espectral*. En general los sonidos no tienen una envolvente espectral singular, bien definida; puede haber muchas maneras de dibujar una curva suave a través del espectro. De otro lado, una envolvente espectral puede especificarse intencionalmente; en cuyo caso, usualmente se aclara cómo hacer el espectro conforme a esto. Para un espectro discreto, por ejemplo, podríamos simplemente leer, en la envolvente espectral, la amplitud deseada de cada parcial y hacerlo así sucesivamente.

A veces la altura de un sonido puede inferirse de su espectro. Para los espectros discretos, la altura está codificada primariamente en las frecuencias de los parciales. Las señales armónicas tienen una altura determinada por su frecuencia fundamental; para la inarmónicas, la altura puede ser clara, ambigua o estar ausente del todo, según reglas complejas y que aún no se entienden por completo. Un espectro de ruido puede tener también una altura perceptible si la envolvente espectral contiene uno o más picos estrechos. En general la fortaleza de un sonido y su timbre dependen más de su envolvente espectral que de las frecuencias en el espectro, si bien la diferencia entre espectro continuo y discreto puede escucharse también como un timbre distinto.

El timbre, así como la afinación, puede evolucionar durante la vida de un sonido. Hemos estado hablando de los espectros como entidades estáticas, sin considerar si cambian o no en el tiempo. Si la altura y el timbre de una señal cambian en el tiempo, podemos pensar en el espectro como la descripción del comportamiento momentáneo de una señal que varía en el tiempo.

Esta manera de ver los sonidos está muy simplificada. El comportamiento real de la altura y del timbre tiene muchos aspectos que no se pueden explicar en los términos de este modelo. Por ejemplo, la cualidad tímbrica llamada "lo áspero" es a veces tomada como si reflejara cambios rápidos en la envolvente espectral en el tiempo. La descripción simplificada que se desarrolla aquí es útil no obstante, en las discusiones acerca de cómo construír espectros discretos o continuos para una amplia variedad de propósitos musicales, tal como lo comenzaremos a mostrar en el resto de este capítulo.

5.2 Multiplicando señales de audio

Hemos estado añadiendo rutinariamente señales de audio, y multiplicándolas por señales con variaciones lentas (utilizadas, por ejemplo, como envolventes de amplitud) desde el capítulo 1. Para entender completamente el álgebra de las señales de audio, debemos considerar también la situación donde dos señales de audio, ninguna de las cuales puede asumirse que cambia lentamente, son multiplicadas. Es clave comprender lo que sucede en la Fórmula de Producto de Cosenos:

$$\cos(a)\cos(b) = [\cos(a + b) + \cos(a - b)]/2$$

para ver porqué esta fórmula es cierta, podemos usar la fórmula para el coseno de una suma de ángulos:

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \mathrm{sen}(a)\mathrm{sen}(b)$$

para evaluar el lado derecho de la fórmula de producto de cosenos; lo que entonces simplifica el lado izquierdo.

Podemos utilizar esta fórmula para ver qué sucede cuando multiplicamos dos sinusoides (página “1”):

$$\cos(\alpha n + \phi)\cos(\beta n + \xi)$$
$$= [\cos((\alpha + \beta)n + (\phi + \xi)) + \cos((\alpha - \beta)n + (\phi - \xi))]/2$$

En palabras, al multiplicar dos sinusoides se consigue un resultado con dos parciales, uno con la suma de las dos frecuencias originales, y otro con su diferencia. (Si la diferencia $\alpha - \beta$ es negativa, simplemente se cambian las dos sinusoides originales y la diferencia queda positiva). Estos dos nuevos componentes se denominan *bandas laterales*.

Esto nos proporciona una técnica para cambiar las frecuencias de un sonido, denominadad *modulación de anillo*, la cual se muestra en su forma más simple en la figura 5.2. Un oscilador provee una *señal portadora*, la cual simplemente se multiplica por la entrada. El término “modulación de anillo” es utilizado de manera más general para indicar la multiplicación de dos señales cualquiera, pero aquí sólo la consideraremos utilizando una señal portadora sinusoidal. (La técnica de modulación de anillo data de la era análoga [Str95]; los multiplicadores digitales reemplazan ahora tanto el VCA (sección 1.5) como el modulador de anillo.)

La figura 5.3 muestra una variedad de resultados que se pueden obtener multiplicando una sinusoide (modulante) de frecuencia angular α y amplitud pico $2a$ por una sinusoide (portadora) de frecuencia angular β y amplitud pico 1:

$$[2a\cos(\alpha n)]\bullet[\cos(\beta n)]$$

(Por simplicidad los términos de la fase son omitidos.) Cada parte de la figura muestra la señal de la modulación y el resultado en el mismo espectro. La señal de modulación aparece como una frecuencia singular, α, a la amplitud a. El producto en general tiene dos componentes de frecuencias, cada una a una amplitud de $a/2$.

<Sin las fases iniciales, la fórmula queda:
$[2a\cos(\alpha n)]\bullet[\cos(\beta n)] = 2a[\cos(\alpha n + \beta n) + \cos(\alpha n - \beta n)]/2$
$= a[\cos((\alpha + \beta)n) + \cos((\alpha - \beta)n)]$>

Las partes (a) y (b) de la figura muestran los casos “generales” donde α y β son diferentes de cero y diferentes entre ellos. Las frecuencias de los componentes de las salidas son $\alpha + \beta$ y $\alpha - \beta$. En la parte (b), ya que $\alpha - \beta < 0$, obtenemos un componente de frecuencia negativa. Debido a que el coseno es una función par, tenemos

$$\cos((\alpha - \beta)n) = \cos((\beta - \alpha)n)$$

así el componente negativo es exactamente equivalente al de la frecuencia positiva $\beta - \alpha$, a la misma amplitud.

En el caso especial donde $\alpha = \beta$, la segunda banda lateral (la diferencia) tiene frecuencia cero. En este caso la fase será significante así que reescribimos el producto con fases explícitas, reemplazando β por α, para obtener:

$$2a\cos(\alpha n + \phi)\cos(\beta n + \xi) =$$
$$= a\cos(2\alpha n + (\phi + \xi)) + a\cos(\phi - \xi).$$

El segundo término tiene frecuencia cero; su amplitud depende de la fase relativa de las dos sinusoides y tiene rango de $+a$ a $-a$ ya que la diferencia de fase $\phi - \xi$ varía de 0 a π radianes. Esta situación se muestra en la parte (c) de la figura 5.3.

Finalmente, la parte (d) muestra una señal portadora cuya frecuencia es cero. Su valor es la constante a (no $2a$; la frecuencia cero es un caso especial). Aquí obtenemos únicamente una banda lateral, de amplitud $a/2$, la usual.

Podemos usar la regla distributiva de la multiplicación para encontrar qué sucede cuando multiplicamos las señales que consisten de más de un parcial cada una.

Por ejemplo, en la situación anterior podemos reemplazar la señal de la frecuencia α con la suma de varias sinusoides, tales como:

$$a_1\cos(\alpha_1 n) + ... + a_k\cos(\alpha_k n)$$

Al multiplicar por la señal de la frecuencia β se obtienen parciales a frecuencias iguales en:

$$\alpha_1 + \beta,\ \alpha_1 - \beta,\ ...,\ \alpha_k + \beta,\ \alpha_k - \beta_k$$

Como antes, si cualquier frecuencia es negativa tomamos su valor absoluto.

La figura 5.4 muestra el resultado de multiplicar una señal periódica compleja (con algunos componentes afinados en razón 0:1:2: ...) por una sinusoide. La envolvente espectral y las frecuencias de los componentes del resultado son cambiadas de acuerdo a reglas relativamente sencillas.

El espectro resultante es escencialmente el espectro original combinado con su reflexión con respecto al eje vertical. Este espectro combinado se desplaza luego a la derecha por la frecuencia portadora. Finalmente, si algunos componentes del espectro cambiado están todavía a la izquierda del eje vertical, son reflejados alrededor de este para hacer frecuencias positivas nuevamente.

En la parte de (b) de la figura, la frecuencia portadora (la frecuencia de la sinusoide) está por debajo de la frecuencia fundamental de la señal compleja. En este caso, el cambio es por una distancia relativamente pequeña, de tal manera que se vuelve a doblar el espectro en los extremos, y casi se sitúan las dos mitades una sobre la otra. El resultado es una envolvente espectral aproximadamente igual a la original (aunque con la mitad de su altura) y un espectro dos veces más denso.

Un caso especial, que no se muestra, es utilizar una frecuencia portadora de la mitad de la fundamental. En este caso, los pares de parciales caerán encima uno del otro, y tendrán razones 1/2 : 3/2 : 5/2: ..., para dar una señal de sólo parciales impares una octava por debajo de la original. Este es un muy simple y efectivo divisor de octava para una señal armónica, asumiendo que usted conoce o puede encontrar su frecuencia fundamental. <$\beta = \alpha/2$; $\alpha + \beta = 3\alpha/2$ y $\alpha - \beta = -\alpha/2$, etc> Si usted quiere parciales pares tanto como los impares (para la señal de octava baja), simplemente mezcle la señal original con la modulada.

La parte (c) de la figura muestra el efecto de utilizar una frecuencia modulante mucho más alta que la frecuencia fundamental de la señal compleja. Aquí el efecto del desdoblado es mucho más claramente visible (únicamente un parcial, el de la izquierda, ha de reflejarse para hacer su frecuencia positiva). La envolvente espectral está ahora ampliamente desplazada de la original; este desplazamiento es usualmente un efecto más fuertemente audible que el de la relocalización de parciales.

Como otro caso especial, la frecuencia portadora puede ser un múltiplo de la fundamental de las señales periódicas complejas; entonces los parciales caen sobre los otros parciales de la misma fundamental, y el único efecto es el cambio en la envolvente espectral.

5.3 Conformación de onda

Otra forma de modulación de la señal, llamada *conformación de onda*, es pasarla a través de una función no lineal escogida apropiadamente. Un diagrama de bloque para hacer esto se muestra en la figura 5.5. La función $f()$ (llamada la *función de transferencia*) distorsiona la onda que entra dándole otra forma. La nueva forma depende de la forma de la onda entrante, de la función de transferencia, y también -de manera crucial- de la amplitud de la señal de entrada. Dado que la amplitud de la onda que entra afecta la forma de la onda que sale (y de hecho el timbre), esta nos da una manera fácil de hacer una familia de timbres que varían continuamente, simplemente variando el nivel de entrada de la transformación. Por esta razón es imprescindible incluir un control de amplitud general como parte de la operación de conformación de onda, tal como se muestra en el diagrama de bloques.

La amplitud de la onda de entrada es llamada el *índice* de conformación de onda. En muchas situaciones, un índice pequeño conduce a una distorsión relativamente pequeña (de tal manera que la salida prácticamente es parecida a la entrada) y los índices más grandes dan un timbre más rico y distorsionado.

La figura 5.6 muestra un ejemplo familiar de conformación de onda, en el cual $f()$ da la cantidad para una *función de corte*. Este ejemplo muestra claramente cómo la amplitud de entrada -el índice- puede afectar la forma de la salida. La función de corte pasa de su entrada a su salida sin cambio, siempre y cuando aquélla <la entrada> esté en el intervalo entre -0.3 y 0.3. Así mientras la entrada no exceda 0.3 en valor absoluto, la salida es igual a la entrada. Pero cuando la entrada se pasa del límite, la salida se mantiene dentro de este; y mientras la amplitud de la entrada sea mayor, el efecto de esta acción de recorte es progresivamente más severo. En la figura, la entrada es una sinusoide que decae. La salida evoluciona desde una onda casi cuadrada al comienzo, hasta una sinusoide pura al final. Este efecto será muy bien conocido por quien haya tocado un instrumento a través de un amplificador con distorsión. Mientras más fuerte es la entrada, más distorsionada es la salida. Por esta razón, el proceso de conformación de onda es a veces llamado *distorsión*.

La figura 5.7 muestra una manera mucho más fácil y sencilla para analizar la situación, en la cual la función de transferencia simplemente eleva al cuadrado la entrada:

$$f(x) = x^2$$

Para una entrada sinusoidal,

$$x(n) = a\cos(\omega n + \phi)$$

tenemos que

$$f(x[n]) = a^2(1 + \cos(2\omega n + 2\phi))/2$$

Si la amplitud a es igual a uno, el resultado es precisamente el resultado de una modulación de anillo de una sinusoide con una sinusoide de la misma frecuencia, descrito en la sección previa: la salida es una sinusoide DC (de frecuencia cero) más una sinusoide al doble de la frecuencia original. Sin embargo, en este ejemplo de conformación de onda, a diferencia de la modulación de anillo, la amplitud de la salida crece con el cuadrado de la entrada.

Manteniendo la misma función de transferencia, consideramos el efecto de enviarle una combinación de dos sinusoides con amplitudes a y b, y frecuencias angulares α y β. Por simplicidad, omitiremos los términos de la fase inicial. Tenemos:

$$x(n) = a\cos(\alpha n) + b\cos(\beta n)$$

y reemplazando esto en $f()$ da

$$f(x[n]) = a^2(1 + \cos(2\alpha n))/2 + b^2(1 + \cos(2\beta n))/2 +$$
$$+ ab[\cos(\alpha + \beta)n) + \cos(\alpha - \beta)n)]$$

Los dos primeros términos son precisamente los que obtendríamos al enviar las dos sinusoides separadamente. El tercer término es dos veces el producto de los dos términos de entrada el cual proviene del término cruzado de la mitad, en la expansión,

$$f(x + y) = x^2 + 2xy + y^2$$

Este efecto, llamado *intermodulación*, se vuelve más y más dominante mientras el número de términos en la entrada se incrementa; si hay k sinusoides en la entrada, hay únicamente k términos “directos” en el producto, pero hay $(k^2 - k)/2$ términos de intermodulación.

En contraste con la modulación de anillo, la cual es una función lineal de su señal de entrada, la conformación de onda es no lineal. Mientras éramos capaces de analizar procesos lineales considerando su acción por separado en todos los componentes de la entrada, en este caso no lineal también debemos considerar las interacciones entre los componentes. Los resultados son muchos más complejos -a veces mucho más ricos sonoramente, pero, de otro lado, mucho más difíciles de entender o predecir.

En general, podemos mostrar que una entrada periódica, sin importar lo compleja que sea, se repetirá en el mismo período después del proceso de conformación de onda: si el período es τ de tal manera que

$$x[n + \tau] = x[n]$$

y temporalmente ajustamos el índice $a = 1$,

$$f(x[n + \tau]) = f(x[n])$$

(En algunos casos especiales la salida se puede repetir en un submúltiplo de τ, de tal manera que obtenemos un armónico de la entrada como resultado; esto sucede por ejemplo en la figura 5.4.)

Las combinaciones de sonidos periódicos en intervalos constantes pueden ocasionar productos distorsionados en los subarmónicos. Por ejemplo, si las dos señales periódicas x y y forman un intervalo de cuarta musical (períodos con la relación 4:3), entonces la suma de los dos se repite a una velocidad más baja por el subarmónico común. En ecuaciones, tendríamos:

$$x[t + \tau/3] = x[t]$$
$$y[t + \tau/4] = y[t]$$

lo cual implica

$$x[t + \tau] + y[t + \tau] = x[t] + y[t]$$

<τ es igual a una fracción enésima de τ que se repite cada n veces, por ejemplo: $\tau = 3\tau/3$>

y así la suma distorsionada $f(x + y)$ se deberá repetir después de un período τ:

$$f(x + y)[n + \tau] = f(x + y)[n]$$

Esto ha sido experimentado por todos los guitarristas eléctricos que han ajustado el amplificador a “overdrive” y tocado las cuerdas B y E al aire, juntas: la distorsión produce a veces sonidos en la nota de la cuerda de E grave, dos octavas por debajo de la aguda.

Para lograr un análisis algo más explícito del efecto de la conformación de onda en una señal de entrada, a veces es útil escribir la función f como una función finita o infinita de una *serie de potencias*:

$$f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + \ldots$$

Si la señal de entrada $x[n]$ es una sinusoide de una unidad de amplitud, $\cos(\omega n)$, podemos considerar la acción de los términos de arriba separadamente:

$$f(a \bullet x[n]) = f_0 + a f_1 \cos(\omega n) + a^2 f_2 \cos^2(\omega n) + a^3 f_3 \cos^3(\omega n) + \ldots$$

<Notar que en este paso se introduce el término (índice) a según el diagrama de bloques de la figura 5.5, en donde ese término permite la modificación de la amplitud de la onda de entrada>

Debido a que los términos de las series son multiplicados sucesivamente por potencias más altas del índice a, un valor más bajo de a enfatizará los primeros términos más pesadamente, y un valor más alto hará énfasis en los últimos.

Los términos de los espectros individuales se pueden encontrar aplicando la fórmula del producto coseno repetidamente:

$$1 = \cos(0)$$
$$x[n] = \cos(\omega n)$$
$$x^2[n] = 1/2 + \cos(2\omega n)/2$$
$$x^3[n] = \cos(-\omega n)/4 + 2\cos(\omega n)/4 + \cos(3\omega n)/4$$
$$x^4[n] = \cos(-2\omega n)/8 + 3\cos(0)/8 + 3\cos(2\omega n)/8 + \cos(4\omega n)/8$$
$$x^5[n] = \cos(-3\omega n)/16 + 4\cos(-\omega n)/16 + 6\cos(\omega n)/16 + 4\cos(3\omega n)/16 + \cos(5\omega n)/16$$

< por ejemplo, $x^3[n] = \cos(\omega n) * \cos(\omega n) * \cos(\omega n)$
$= \cos(\omega n) * (1/2 + \cos(2\omega n)/2)$
$= 2\cos(\omega n)/4 + \cos(3\omega n)/4 + \cos(-\omega n)/4$>

y así sucesivamente. En los numeradores de las fracciones se reconoce el triángulo de Pascal. El Teorema del Límite Central de la probabilidad implica que cada k-ésima fila puede ser aproximada a una curva Gaussiana cuya desviación normal (una medida de su ancho) es proporcional a la raíz cuadrada de k. <Son “gaussianas” que se van ensanchando a medida que sus alturas van decreciendo>

Los términos con frecuencias negativas (que se muestran separadamente por claridad) se combinan con los positivos; la envolvente espectral se dobla sobre sí misma de la misma manera que en el ejemplo de la figura 5.4 de la modulación de anillo.

Si los coeficientes f_k son todos números positivos o cero, así mismo son todas las amplitudes de las sinusoides en la expansión de arriba. En este caso todas las fases quedan coherentes en tanto a varía y así logramos una ampliación del espectro (y posiblemente un incremento drástico de la amplitud) con el incremento de los valores de a. De otro lado, si algunos de los f_k son positivos y otros son negativos, las expansiones diferentes se interferirán destructivamente; esto dará una evolución espectral de un sonido más complicado.

Note también que las ampliaciones sucesivas contienen únicamente parciales pares o parciales impares. Si la función de transferencia (en forma de series) contiene únicamente potencias pares:

$$f(x) = f_0 + f_2 x^2 + f_4 x^4 + ...$$

entonces el resultado, teniendo únicamente parciales pares, sonará una octava más aguda que la sinusoide de entrada. Si se muestran únicamente los parciales impares en la expansión de $f(x)$, entonces la salida contendrá únicamente parciales impares. Si f no se puede expresar exactamente como una serie de potencias (por ejemplo la función corte de la figura 5.3), sigue siendo cierto que si f es una función par, es decir, si

$$f(-x) = f(x)$$

usted conseguirá únicamente armónicos pares y si f es una función impar,

$$f(-x) = -f(x)$$

conseguira armónicos impares.

Muchos trucos matemáticos han sido propuestos para utilizar conformación de onda y generar espectros específicos. En cambio de eso, usted puede generar sinusoides puras en cualquier armónico de la fundamental utilizando un polinomio Chebisev como una función de transferencia, y desde ahí, usted puede construír cualquier espectro estático deseado (el ejemplo E05.chebychev.pd demuestra esto.) Generar familias de espectros aplicando la conformación de onda en una sinusoide de amplitud variable puede convertirse en algo complicado, sin embargo algunos casos especiales interesantes han sido encontrados, y de éstos se desarrollan en detalle algunos en el capítulo 6.

5.4 Modulación de frecuencia y de fase

Si una sinusoide está produciendo una frecuencia que varía lentamente en el tiempo, la escuchamos como si tuviera variaciones de altura. Pero si la altura cambia tan rápidamente que nuestros oídos no pueden seguir el cambio, -por ejemplo, si el cambio mismo ocurre en o por encima de la frecuencia fundamental de la sinusoide- escuchamos un cambio tímbrico. Los timbres generados de esta manera son ricos y de una amplia variedad. El descubrimiento de John Chowning de esta posibilidad revolucionó el campo de la música por computador. Desarrollamos aquí la *modulación de frecuencia*, usualmente llamada FM, como un caso especial de conformación de onda; el análisis dado aquí es algo diferente.

La técnica FM en su forma más sencilla se muestra en la figura 5.8 (parte a). Una sinusoide de frecuencia modulada es aquella cuya frecuencia varía sinusoidalmente, con alguna frecuencia angular ω_m alrededor de una frecuencia central ω_c de tal manera que las frecuencia instantáneas varían entre $(1 - r)\omega_c$ y $(1 + r)\omega_c$, con los parámetros ω_m controlando la variación de la frecuencia y r controlando la profundidad de la variación. Los parámetros ω_c, ω_m y r son llamados la *frecuencia portadora*, la *frecuencia de modulación* y el *índice de* *modulación* respectivamente.

<En un caso de modulación lenta ω_m = 1 Hz -ondas sinusoidales-, la onda con ω_c (supongámosla a 220 Hz) suena como un vibrato, con una duración de un (1) segundo. La amplitud se controla desde el oscilador modulador. El documento de Chowning (La Síntesis de Espectros Complejos por medio de la Modulación de la Frecuencia) dice “La cantidad en que la portadora varía alrededor de su promedio, o (lo que es lo mismo) la desviación pico de la frecuencia, es proporcional a la amplitud de la onda de modulación”.>

Es costumbre utilizar una formulación más simple, escencialmente equivalente, en la cual la fase de la sinusoide portadora, en lugar de la frecuencia, es modulada sinusoidalmente. (Esto da un resultado equivalente ya que la frecuencia instantánea es la velocidad de cambio de la fase, dado que la velocidad de cambio de una sinusoide es precisamente otra sinusoide.) La formulación de la modulación de fase se muestra en la parte (b) de la figura.

Podemos analizar el resultado de la modulación de fase como sigue, asumiendo que el oscilador modulante y la tabla de ondas son ambas sinusoidales, y que las frecuencias portadora y de modulación no están variando en el tiempo. La señal resultante puede escribirse como

$$x[n] = \cos(a\cos(\omega_m n) + \omega_c n)$$

El parámetro a que toma el lugar del anterior parámetro r, es de esta manera llamado el índice de modulación; también controla la extensión de la variación de la frecuencia relativa a la frecuencia portadora ω_c. Si a = 0, no hay variación de la frecuencia y la expresión se reduce a la sinusoide portadora, sin modificaciones; en tanto a se incrementa la onda se va haciendo más compleja.

Para analizar el espectro resultante podemos re-escribir la señal como,

$$x[n] = \cos(\omega_c n)*\cos(a\cos(\omega_m n)) - \mathrm{sen}(\omega_c n)*\mathrm{sen}(a\cos(\omega_m n))$$

Podemos considerar el resultado como una suma de dos generadores de conformadores de onda, cada uno operando una sinusoide de frecuencia ω_m y con un índice de conformación de onda a y cada anillo modulado, con una sinusoide de frecuencia ω_c. La función de conformación de onda f está dada por $f[x] = \cos[x]$ para el primer término, y por $f[x] = \mathrm{sen}[x]$ para el segundo.

Retornando a la figura 5.4 podemos predecir que el espectro lucirá así.

Los dos espectros armónicos a la salida del proceso de conformación de onda son

$$\cos(a\cos(\omega_m n))$$

y

$$\mathrm{sen}(a\cos(\omega_m n))$$

y tienen respectivamente armónicos afinados a

$$0,\ 2\omega_m,\ 4\omega_m, ...$$

y

$$\omega_m,\ 3\omega_m,\ 5\omega_m, ...$$

y cada uno está multiplicado por una sinusoide a la frecuencia portadora. Habrá así un espectro centrado a la frecuencia portadora ω_c con bandas laterales tanto de múltiplos pares como impares de la frecuencia de modulación ω_m, aportados respectivamente por los términos seno y coseno de la conformación de onda de arriba. Cuando el índice de modulación a cambia, controla la fortaleza relativa de los diversos parciales. Los parciales mismos están situados en las frecuencias

$$\omega_c + m\omega_m$$

donde

$$m = ...-2,-1,0,1,2,...$$

Al igual que con cualquier situación donde dos señales periódicas se multiplican, si hay algún supermúltiplo de los dos períodos, el producto resultante se repetirá al cabo de ese largo período. Así, si los dos períodos son $k\tau$ y $m\tau$, donde k y m son primos relativos, ambos se repiten al cabo de un intervalo de tiempo de $km\tau$. En otras palabras, si los dos tienen frecuencias que son ambas múltiplos de alguna frecuencia común, de tal manera que $\omega_m = k\omega$ y $\omega_c = m\omega$, de nuevo con k y m primos relativos, el resultado se repetirá a una frecuencia del submúltiplo común ω. De otro lado, si no se encuentra ningún submúltiplo común ω, o si sólo los submúltiplos son más bajos que cualquier altura discernible, entonces el resultado será inarmónico.

Mucho más de la FM se puede encontrar en libros de texto [Moo90, p.316] [DJ85, pp.115-139] [Bou00] y literatura investigativa. Algunas de las posibilidades se muestran en los siguientes ejemplos.

<Ver: http://www.eumus.edu.uy/revista/nro1/jure.html >

5.5 Ejemplos

Modulación de anillo y espectros

El ejemplo E01.spectrum.pd sirve para presentar una herramienta de medición del espectro que utilizaremos; de aquí saltamos al segundo ejemplo, E02.ring.modulation.pd, el cual muestra el efecto del proceso de modulación de anillo de un espectro armónico (el cual se trabajó teóricamente en la sección 5.2 y se mostró en la figura 5.4). En el ejemplo consideramos una señal cuyos armónicos (del 0 hasta el 5) tienen todos amplitud de una unidad.

Los armónicos se pueden encender y apagar separadamente utilizando interruptores de palanca. Cuando todos están encendidos, la envolvente espectral tiene el pico en DC (debido a que la señal constante cuenta el doble en tanto se fortalecen las otras sinusoides), tiene una región plana desde los armónicos 1 hasta 5, y luego desciende a cero.

En la porción de la generación de la señal del parche (parte (a) de la figura), sumamos los seis parciales y multiplicamos la suma por el único oscilador portador. (Las seis señales se suman implícitamente conectándolas todas a la misma entrada del objeto *~.) El valor de la fundamental en la parte superior es computado para alinearlo bien con el análisis espectral, cuyos resultados se muestran en la parte (b) de la figura.

El análisis espectral (el cual utiliza técnicas que no describiremos hasta el capítulo 9) muestra la localización de las sinusoides (asumiendo un espectro discreto) sobre el eje horizontal y sus magnitudes sobre el eje vertical. Así la presencia de un pico en DC de magnitud uno en el espectro de la señal de entrada predice, en la figura 5.3, que debería haber un pico en el espectro de salida, en la frecuencia portadora, de altura 1/2. De manera similar, las otras dos sinusoides en la señal de entrada, que tienen una altura de 1/2 en el espectro, hacen levantar dos picos cada una, de altura 1/4, en la salida. Una de estas cuatro ha sido reflejada con respecto al borde izquierdo de la figura (tomando el valor absoluto de su frecuencia negativa).

Divisor de octava y sumador de formante

Como se sugirió en la sección 5.2, cuando se considera el resultado de modular una señal armónica compleja (es decir, periódica) por una sinusoide, un interesante caso especial es ajustar el oscilador portador a 1/2 de la frecuencia fundamental, lo cual hace caer el sonido resultante una octava con sólo una relativamente pequeña deformación de la envolvente espectral. Otro caso especial es modular con una sinusoide a varias veces la frecuencia fundamental, lo cual en efecto desplaza la envolvente espectral sin cambiar la frecuencia fundamental del resultado. Esto se demuestra en el ejemplo E03.octave.divider.pd (figura 5.10). La señal que procesamos aquí es una grabación de voz hablada.

Los subparches `pd looper` y `pd delay` esconden detalles. El primero es un muestreador de lazo como el que se presentó en el capítulo 2. El segundo es un retraso de 1024 muestras, que utiliza objetos que serán presentados luego en el capítulo 7. Presentaremos un nuevo tipo de objeto aquí:

`fiddle~`: seguidor de altura. La entrada toma una señal para ser analizada, y mensajes para cambiar sus ajustes. Dependiendo de los argumentos creados `fiddle~` puede tener un número variable de salidas ofreciendo información diversa acerca de la señal de entrada. Como se muestra aquí, con solamente un argumento creado para especificar el tamaño de la ventana, la tercera salida intenta reportar la altura de la entrada y la amplitud de esa porción de la entrada que se repite (por lo menos de manera aproximada) en la altura reportada. La salida de éstas es una lista de dos números. La altura, en unidades MIDI, se reporta como cero si no se logra identificar.

En este parche la tercera salida es desempacada en su componentes de altura y amplitud, y el componente de altura es filtrado por el objeto `moses` de tal manera que sólo se utilizan las estimaciones de altura exitosas (las que no son cero). Estas son convertidas a unidades de frecuencia por el objeto `mtof`. Finalmente las frecuencias estimadas son o reducidas en 1/2 o multiplicadas por 15, dependiendo del multiplicador seleccionado para proveer la modulación de la frecuencia. En el primer caso obtenemos un divisor de octava y en el segundo, armónicos altos adicionales que deforman las vocales.

Conformación de onda y sonidos diferenciados

El ejemplo E04.difference.tone.pd (figura 5.11) presenta la conformación de onda, demostrando la no linealidad del proceso. Dos sinusoides (de 300 y 225 Hertz, o en una razón de 4 a 3) se suman y luego se recortan, utilizando un nuevo tipo de objeto:

`clip~`: cortador de señal. Cuando la señal está entre los límites especificados por los argumentos del objeto `clip~`, pasa sin cambio alguno; pero cuando cae por debajo del límite inferior o se eleva por encima del límite superior, es reemplazada por el límite. El efecto de recorte de una señal sinusoidal se mostró gráficamente en la figura 5.6.

Mientras la amplitud de la suma de sinusoides sea menos del 50 por ciento, la suma no excede el valor absoluto de uno y el objeto `clip~` permite pasar el par de sinusoides sin cambio hacia la salida. Tan pronto la amplitud excede el 50 por ciento, la no linealidad del objeto `clip~` da a luz productos distorsionados (a las frecuencias $300m$ y $225n$ para los enteros m y n), y al ser múltiplos de 75, es esta frecuencia la fundamental del sonido resultante. Visto de otra manera, el período común más corto de las dos sinusoides es de 1/75 de segundo (lo cual representa cuatro períodos del sonido a 300 Hertz y tres períodos del sonido a 225 Hertz), de tal manera que se repite 75 veces por segundo.

La frecuencia del sonido a 225 Hertz en el parche se puede variar. Si es movida ligeramente por fuera de 225, se producen sonidos de batido. Otros valores encuentran otros subarmónicos comunes que también dan sonidos inarmónicos enriquecidos.

Conformación de onda utilizando polinomios Chebichev

El ejemplo E05.chebichev.pd (figura 5.12) demuestra cómo puede utilizar conformación de onda para generar armónicos puros. Nos limitaremos a un ejemplo específico en el cual nos gustaría generar el quinto armónico puro,

$$\cos(5\omega n)$$

por conformación de onda de una sinusoide

$$x[n] = \cos(\omega n)$$

Necesitamos encontrar un función de transferencia apropiada $f(x)$. Primero vamos a la fórmula para la función de conformación de onda $f(x) = x^5$ (página “131”), la cual nos da el primer, tercer y quinto armónico:

$$16x^5 = \cos(5\omega n) + 5\cos(3\omega n) + 10\cos(\omega n)$$

A continuación añadimos un múltiple apropiado de x^3 para cancelar el tercer armónico:

$$16x^5 - 20x^3 = \cos(5\omega n) - 5\cos(\omega n)$$

y luego por un múltiplo de x para cancelar el primer armónico:

$$16x^5 - 20x^3 + 5x = \cos(5\omega n)$$

Así, para nuestra función de conformación de onda escogimos

$$f(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

Este procedimiento nos permite aislar cualquier armónico deseado; las funciones resultantes f son conocidas como *polinomios Chebichev*.

Para incorporar esto en un instrumento de conformación de onda, simplemente construimos un parche que trabaje como en la figura 5.5, computando la expresión

$$x[n] = f(a[n]\cos(\omega n))$$

donde $a[n]$ es un *índice* apropiado que puede variar como una función del número de muestra n. Cuando a es de valor uno, aparece el quinto armónico puro. Otros valores de a dan espectros variables los cuales, en general, tienen el primer y tercer armónico, así como también el quinto.

Con una apropiada combinación de polinomios de Chebichev podemos solucionar cualquier superposición de componentes a la salida de la onda (de nuevo, mientras el índice de conformación de onda sea uno). Pero la promesa real del proceso de conformación de onda -que simplemente cambiando el índice podemos fabricar espectros que evolucionen en formas interesantes pero controlables- no está dirigida, por lo menos directamente, al procedimiento de Chebichev.

Conformación de onda utilizando la función exponencial

Regresamos de nuevo a los espectros computados en la página “131”, correspondientes a las funciones de conformación de onda de la forma $f(x) = x^k$.

Notamos con placer que no solamente están todas en fase (de tal manera que pueden superponerse con resultados predecibles) si no también que los espectros se propagan en tanto k se incrementa. También, en series de la forma,

$$f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + ...,$$

un índice más alto de modulación prestará un mayor peso relativo a los términos de más alta potencia de la expansión; tal como lo vimos anteriormente, si el índice de modulación es a los diversos términos x^k son multiplicados por f_0, af_1, $a^2 f_2$ y así sucesivamente.

Suponga ahora que queremos organizar los diferentes términos en la expansión de arriba para dominar el resultado de una manera predecible, como una función del índice a. Para escoger el ejemplo más sencillo posible, suponga que queremos que f_0 sea el término más grande para $0 < a < 1$, luego lo retomamos para el término de crecimiento más rápido af_1 con $1 < a < 2$, el cual es también retomado por el término $a^2 f_2$ para $2 < a < 3$ y así sucesivamente, de tal manera que cada n-ésimo término se toma sobre el índice n. Para hacer que esto suceda sólo requerimos que

$$f_1 = f_0,\ 2f_2 = f_1,\ 3f_3 = f_2, ...$$

y así, escogiendo $f_0 = 0$, obtenemos $f_1 = 1$, $f_2 = 1/2$, $f_3 = 1/6$, y en general,

$$f_k = 1/(1*2*3*...*k)$$

Estos son los coeficientes de la serie de potencias para la función

$$f(x) = e^x$$

donde $e = 2.7$, la constante de Euler.

Antes de conectar e^x como una función de transferencia, es inteligente planear cómo tratar con la amplitud de la señal, ya que e^x crece rápidamente con el incremento de x. Si le vamos a conectar una sinusoide de amplitud a la salida máxima será e^a, pero con la fase cero. Una opción sencilla y natural es simplemente dividir por e^a para reducir el pico a uno, dando:

$$f(a\cos(\omega n)) = e^{a\cos(\omega n)} / e^a = e^{a(\cos(\omega n)-1)}$$

Esto se realiza en el ejemplo E06.exponential.pd. Los espectros resultantes para $a = 0.4$ y 16 se muestran en la figura 5.13. Mientras el índice de conformación de onda crece, progresivamente se presenta menos energía en la fundamental; la energía es incrementalmente propagada sobre los parciales.

Conformación de onda sinusoidal: paridad e imparidad

Otra interesante clase de función de transferencia de conformación de onda son las sinusoides:

$$f(x) = \cos(x + \phi)$$

que incluyen las funciones seno y coseno (las cuales se consiguen haciendo $\phi = 0$ y $\phi = -\pi/2$, respectivamente). Estas funciones, siendo la primera par y la otra impar dan como resultado espectros armónicos pares e impares, los cuales se convierten en:

$$\cos(a\cos(\omega n)) = J_0(a) - J_2(a)\cos(2\omega n) + 2J_4(a)\cos(4\omega n) - 2J_6(a)\cos(6\omega n) \pm ...$$

$$\text{sen}(a\cos(\omega n)) = 2J_1(a)\cos(2\omega n) - 2J_3(a)\cos(3\omega n) + 2J_5(a)\cos(5\omega n) \mp ...$$

Las funciones $J_k(a)$ son las funciones de Bessel del primer tipo, utilizadas por los ingenieros para resolver problemas acerca de las vibraciones o de flujo de calor en discos. Para otros valores de ϕ, podemos expandir la expresión para f:

$$f(x) = \cos(x)\cos(\phi) - \text{sen}(x)\text{sen}(\phi)$$

de tal manera que el resultado es una mezcla entre armónicos pares e impares, con ϕ controlando las amplitudes relativas de las dos. Esto se demuestra en parche E07.evenodd.pd, mostrado en la figura 5.14.

<En el parche, es necesario abrir el subparche “make-table” y cambiar “array1” en las tres veces que aparece, por “E07” para que se pueda realizar la lectura de la tabla.>

Modulación de fase y FM

El ejemplo E08.phase.mod.pd de la figura 5.15, muestra cómo utilizar Pd para realizar las verdaderas modulación de frecuencia (parte a) y modulación de fase (parte b). Estas corresponden al diagrama de bloques de la figura 5.8. Para lograr la modulación de la fase, el oscilador portador se divide en sus componentes de lectura de fase y de coseno. La señal es de la forma

$$x[t] = \cos(\omega_c n + a\cos(\omega_m n))$$

donde ω_c es la frecuencia portadora, ω_m es la frecuencia de modulación, y a es el índice de modulación- todas en unidades angulares.

Podemos predecir el espectro expandiendo el coseno externo:

$$x[t] = \cos(\omega_c n)\cos(a\cos(\omega_m n)) - \text{sen}(\omega_c n)\text{sen}(a\cos(\omega_m n))$$

Conectando en la expansión de la página “141” y simplificando productos:

$$\begin{aligned} x[t] &= J_0(a)\cos(\omega_c n) \\ &+ J_1(a)\cos((\omega_c + \omega_m)n + \pi/2) + J_1(a)\cos((\omega_c - \omega_m)n + \pi/2) \\ &+ J_2(a)\cos((\omega_c + 2\omega_m)n + \pi/2) + J_2(a)\cos((\omega_c - 2\omega_m)n + \pi/2) \\ &+ J_3(a)\cos((\omega_c + 3\omega_m)n + 3\pi/2) + J_3(a)\cos((\omega_c - 3\omega_m)n + 3\pi/2) + ... \end{aligned}$$

Así los componentes están centrados alrededor de la frecuencia portadora ω_c con bandas laterales extendiéndose en una u otra dirección, cada una espaciada ω_m de la siguiente. Las amplitudes son funciones del índice de modulación, y no dependen de las frecuencias. La figura 5.16 muestra algunos espectros de modulación de fase de dos operadores, medidos utilizando el ejemplo E09.FM.spectrum.pd.

La modulación de fase puede así ser vista como una forma de conformación de onda modulada, de anillo. De esta manera podemos utilizar las estrategias descritas en la sección 5.2 para generar combinaciones particulares de frecuencias. Por ejemplo, si la frecuencia portadora es la mitad de la frecuencia de modulación, obtiene un sonido con armónicos impares, exactamente como en el ejemplo de la división de octava (figura 5.10).

La modulación de la frecuencia no requiere estar restringida a portadoras puramente sinusoidales u osciladores de modulación. Un camino bastante recorrido es aplicar el efecto de modulación de fase sobre el propio espectro de modulación de fase. Hay entonces dos índices de modulación (llamémoslos a y b) y dos frecuencias de modulación (ω_m y ω_p) y la onda es:

$$x[n] = \cos(\omega_c n + a\cos(\omega_m n) + b\cos(\omega_p n))$$

Para analizar el resultado, sólo re-escribimos la serie FM original de arriba, reemplazando todos los $\omega_c n$ por $\omega_c n + b\cos(\omega_p n)$. La tercera banda lateral positiva quedará, por ejemplo:

$$J_3(a)\cos((\omega_c + 3\omega_m)n + 3\pi/2 + b\cos(\omega_p n))$$

Esto mismo es precisamente otro espectro FM, con sus propias bandas laterales de frecuencias

$$\omega_c + 3\omega_m + k\omega_p,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

con amplitudes $J_3(a)J_k(b)$ y fase $(3+k)\pi/2$. El ejemplo E10.complex.FM.pd (que no se muestra aquí) ilustra esto graficando los espectros de un instrumento FM con dos moduladores.

Desde los primeros tiempos los investigadores han buscado combinaciones de fases, frecuencias e índices de modulación, para instrumentos simples y compactos de modulación de fase, que manejen imitaciones de sonidos de instrumentos familiares. Esto se convirtió en una gran industria, con la introducción comercial de los sintetizadores FM.

Ejercicios

1. Un sonido tiene fundamental de 440. Cómo se le podría aplicar la modulación de anillo para que diera un sonido de 110 Hertz con únicamente parciales impares? Podría luego llenarlo con los pares si quisiera?

2. Una sinusoide con frecuencia 400 y amplitud pico de unidad es elevada al cuadrado. Cuáles son las amplitudes y las frecuencias de los componentes de la nueva señal?

3. Qué frecuencias portadoras y modulantes le debería dar a un instrumento FM de dos operadores para que entregue frecuencias de 618, 1000 y 2618 Hertz? (esta es una característica prominente de *Stiria* de Chowning.)

4. Dos sinusoides con frecuencia 300 y 400 Hertz y amplitud pico uno (de tal manera que la amplitud RMS ≈ 0.707) se multiplican. Cuál es la amplitud RMS del producto?

5. Suponga que quiso hacer una FM un poco más complicada, modulando el oscilador *modulante*, de la siguiente manera:

6. A una sinusoide de frecuencia ω se le aplica la modulación de anillo con otra sinusoide de exactamente la misma frecuencia. Qué diferencia de fase hará que el componente DC del resultado desaparezca?