Capítulo 10

Ondas clásicas

Hasta ahora hemos tomado tres aproximaciones a la síntesis de formas de onda repetitivas: síntesis aditiva (capítulo 1), síntesis de tabla de ondas (capítulo 2), y conformación de ondas (capítulos 5 y 6). Este capítulo presenta una cuarta aproximación en la cual las ondas se construyen explícitamente a partir de segmentos de línea con extremos controlados. Esta aproximación es por lo menos históricamente tan importante como las demás y predominó durante el período del sintetizador análogo, aproximadamente entre 1965 y 1985. A falta de un nombre mejor, usaremos el término *ondas clásicas* para denotar las ondas compuestas por segmentos de línea.

Estas incluyen las *ondas diente de sierra*, *triangular* y *rectangular* ilustradas en la figura 10.1, entre muchas otras posibilidades. Las caraterísticas sobresalientes de las ondas clásicas son, o sus saltos discontinuos (cambios de valor) o sus esquinas (cambios de la pendiente). En la figura las ondas diente de sierra y rectangular tienen saltos (uno por ciclo para la diente de sierra y dos para la rectangular), y una pendiente constante en el resto (negativa para la onda diente de sierra, cero para la onda rectangular). La onda triangular no tiene saltos, pero la pendiente cambia discontinuamente dos veces por ciclo.

Para utilizar ondas clásicas efectivamente, es útil entender cómo la onda está refelejada en su serie de Fourier (para computar esta necesitaremos el conocimiento del capítulo 9, de ahí el porqué este capítulo aparece aquí y no antes.) También necesitaremos estrategias para sintetizar digitalmente las ondas clásicas. Estas ondas prueban ser mucho más susceptibles a los problemas del sobre-doblado que cualquier otra que hayamos tratado antes, de tal manera que debemos poner especial cuidado en su control.

En general nuestra estrategia para predecir y controlar el sobre-doblado deberá considerar primero aquellas ondas muestreadas cuyo período es un entero N. Luego, si queremos obtener una onda de un período entero (que llamemos τ) aproximamos τ a un cociente N/R de dos enteros. Conceptualmente por lo menos, podemos sintetizar la onda deseada con período N, y tomar luego sólo una de cada una de las R muestras de la salida. Este último paso de muestreo es donde se produce el sobre-doblado y un manejo cuidadoso nos ayudará a controlarlo.

10.1 Simetría y serie de Fourier

Antes de realizar un análisis cuantitativo de las series de Fourier de las ondas clásicas, hagamos una pausa para dos observaciones útiles acerca de la simetría en las ondas y las simetrías correspondientes de la serie de Fourier. Primero, una serie de Fourier podría consistir sólo de armónicos de numeración par o impar; esto se refleja en las simetrías comparando una onda con su desplazamiento en la mitad de un ciclo. Segundo, las series de Fourier pueden contener coeficientes únicamente reales o únicamente imaginarios (correspondientes a las funciones coseno y seno). Esto se refleja en las simetrías comparando la onda con su reverso en el tiempo.

En esta sección asumiremos que nuestra onda tiene un período entero N, y aún más, por simplicidad, que N es par (y que si no lo es, podemos tomar las muestras con un factor de dos). Sabemos, por el capítulo 9, que cualquier onda (real o compleja) $X[n]$ puede escribirse como una serie de Fourier (cuyos coeficientes se denotarán como $A[k]$):

$$X[n] = A[0] + A[1]U^n + ... + A[N - 1]U^{(N-1)n}$$

o, de manera equivalente,

$$X[n] = A[0] + A[1](\cos(\omega n) + i\,\text{sen}(\omega n)) + \ldots$$

$$+ A[N - 1](\cos(\omega(N - 1)n) + i\,\text{sen}(\omega(N - 1)n))$$

donde $\omega = 2\pi/N$ es la frecuencia fundamental de la onda, y

$$U = \cos(\omega) + i\,\text{sen}(\omega)$$

es un número comlejo de magnitud unitaria cuyo argumento es ω.

Para analizar la primera simetría, retrasamos la señal $X[n]$ en medio ciclo. Ya que $U^{N/2} = -1$, tenemos:

$$X[n + N/2] = A[0] - A[1]U^{n} + A[2]U^{2n} \pm \ldots$$

$$+ A[N - 2]U^{(N-2)n} - A[N - 1]U^{(N-1)n}$$

En efecto, un retraso de medio ciclo cambia el signo de cada uno de los demás términos de la serie de Fourier. Combinamos esta con la serie original de dos maneras diferentes. Si X' denota la mitad de la suma de las dos:

$$X'[n] = (X[n] + X[n + N/2])/2 = A[0] + A[2]U^{2n} + \ldots + A[N - 2]U^{(N-2)n}$$

y X'' la mitad de la diferencia:

$$X''[n] = (X[n] - X[n + N/2])/2 = A[1]U^{n} + A[3]U^{3n} + \ldots + A[N - 1]U^{(N-1)n}$$

vemos que X' consiste únicamente de los armónicos pares (incluyendo DC) y X'' de los impares.

Además, si X llega a ser igual a sí mismo desplazado en una mitad de ciclo, esto es, si $X[n] = X[n + N/2]$, entonces, (de acuerdo con las definiciones de X' y de X'') tenemos que $X' = X[n]$ y $X'' = 0$. Esto implica que, para este caso, $X[n]$ tiene únicamente armónicos pares. En realidad, esto no debería ser una sorpresa, ya que en este caso $X[n]$ debería repetirse cada $N/2$ muestras, de tal manera que su frecuencia fundamental es el doble de alta de lo normal para un período N.

De la misma manera, si $X[n] = -X[n + N/2]$, entonces X sólo puede tener armónicos impares. Esto nos permite fácilmente dividir cualquier onda en sus armónicos pares o impares. (Es el equivalente a utilizar un filtro peine para extraer armómicos pares o impares; ver capítulo 7.)

Para derivar la segunda relación de simetría, comparamos $X[n]$ con su reverso en el tiempo, $X[-n]$ (o, de manera equivalente, y ya que X se repite cada N muestras, con $X[N - n]$. La serie de Fourier es:

$$X[-n] = A[0] + A[1](\cos(\omega n) - i\,\text{sen}(\omega n)) + \ldots$$

$$+ A[N - 1](\cos(\omega(N - 1)n) - i\,\text{sen}(\omega(N - 1)n))$$

(ya que la función coseno es par y la función seno es impar). De la misma manera que antes podemos extractar los cosenos haciendo $X[n]$ como la mitad de la suma:

$$X'[n] = (X[n] + X[-n])/2 = A[0] + A[1]\cos(\omega n) + \ldots + A[N - 1](\cos(\omega(N - 1)n)$$

y X'' como lamitad de la diferencia dividida por i:

$$X''[n] = (X[n] - X[-n])/2 = A[1]\mathrm{sen}(\omega n) + ... + A[N-1]\mathrm{sen}(\omega(N-1)n)$$

De tal forma que si $X[n]$ satisface $X[-n]$ la serie de Fourier consiste de términos coseno únicamente; si $X[-n] = -X[n]$ consiste de términos seno únicamente; y como antes, podemos descomponer cualquier $X[n]$ (que se repite cada N muestras) como una suma de los dos.

10.1.1 Ondas dientes de sierra y simetría

Como un ejemplo, apliquemos el cambio de simetría (armónicos pares e impares) a una onda diente de sierra. La figura 10.2 (parte a) muestra la onda diente de sierra original y la parte (b) muestra el resultado de desplazarla en medio ciclo. La suma de las dos (parte c) cae discontinuamente cada que cualquiera de las dos copias lo hace, y traza un segmento de línea siempre que cualquiera de los dos componentes lo hace; así que se convierte en una onda diente de sierra, de la mitad del período original (el doble de la frecuencia fundamental). Sustrayendo las dos ondas dientes de sierra (parte d) obtenemos una onda con traslape cero excepto en las discontinuidades. Las discontinuidades provienen de la onda diente de sierra original que salta en la misma dirección (negativa a positiva), pero aquellas que provienen de la onda desplazada son negadas y saltan de positivo a negativo. El resultado es una *onda cuadrada*, una onda rectangular particular, en la cual los dos segmentos que la componen tienen la misma duración.

Esta simetría fue utilizada con gran efecto en el diseño de los sintetizadores análogos Buchla; en lugar de ofrecer un único generador de diente de sierra, Buchla diseñó un oscilador que a la salida tenía las porciones separadas de los armónicos pares e impares, de tal manera que el cruzamiento atenuado entre los dos permitía permitía un control continuo sobre la fortaleza relativa de los armónicos pares e impares de la onda análoga.

10.2 Diseccionando ondas clásicas

Entre las varias conclusiones que podemos deducir de la descomposición de la onda diente de sierra en armónicos pares e impares (figura 10.2), la primera es que una onda cudrada puede descomponerse en una combinación lineal de dos ondas dientes de sierra. Podemos llevar esta idea más allá, y mostrar cómo componer cualquier onda clásica teniendo sólo saltos (discontinuidades en el valor) pero no esquinas (discontinuidades en la pendiente) como una suma de ondas dientes de sierra de varias fases y amplitudes. Desarrollamos entonces la idea aún más allá, mostrando cómo generar ondas con esquinas (ya sea con o a cambio de saltos) utilizando otra forma de onda elemental llamada la *onda parabólica*.

Suponga primero que una onda de período N tiene discontinuidades en j puntos diferentes, $L_1,..., L_j$, todas sobre el ciclo entre 0 y N , en el cual la onda salta en valores $d_1,..., d_j$. Un valor negativo de d_1, por ejemplo, significaría que la onda salta de un valor más alto a otro más bajo en el punto L_1, y un valor positivo de d_1 significaría un salto de un valor más bajo a otro más alto.

Por ejemplo, la figura 10.3 (parte a) muestra una onda clásica con dos saltos: $(L_1,d_1) = (0.3N,-0.3)$ y $(L_2,d_2) = (0.6N,1.3)$. Las partes (b) y (c) muestran ondas dientes de sierra, cada una con los dos saltos. La suma de las dos ondas dientes de sierra reconstruye la onda de la parte (a), excepto por una posible constante (DC) fuera de línea

La onda diente de sierra con un salto de una unidad en el punto cero está dada por:

$$s[n] = n/N - 1/2$$

sobre el período $0 \le n \le N - 1$, y se repite para otros valores de n. Una onda diente de sierra con un salto (L,d) está dada por $s'[n] = ds[n - L]$. La suma de todos los componentes ondas dientes de sierra es:

$$x[n] = d_1 s[n - L_1] + ... + d_j s[n - L_j]$$

Las pendientes de los segmentos de la onda de la parte (a) de la figura son todos los mismos, igual a la suma de las pendientes de las ondas dientes de sierra que los componen:

$$-(d_1 + ... + d_j)/N$$

Las ondas cuadrada y rectangular tienen segmentos de línea horizontales (con pendiente cero); para que esto suceda en general, los saltos deben sumar cero: $d_1 + ... + d_j = 0$.

Para descomponer ondas clásicas con esquinas utilizamos la onda parabólica, la cual, sobre un único período de 0 a N es igual a

$$p[n] = (1/2)(n/N - 1/2)^2 - 1/24$$

como se muestra en la figura 10.4. Es un polinomio de segundo grado (cuadrático), en la variable n, organizado de tal manera que alcanza su máximo en $n = N/2$, el componente DC es cero (o, en otras palabras, el valor promedio de un ciclo de la onda es cero), y de tal manera que la pendiente cambia discontinuamente en $-1/N$ al inicio del ciclo.

Para construír una onda con un número deseado de esquinas (suponga que están en los puntos $M_j, ..., M_l$, con cambios de pendiente iguales a $c_1, ..., c_l$) sumamos las ondas parabólicas necesarias:

$$x[n] = -Nc_1 p[n - M_1] - ... - Nc_l p[n - M_l]$$

Un ejemplo se muestra gráficamente en la figura 10.5.

Si la suma $x[n]$ debe contener segmentos de recta (no segmentos de curva), los términos n^2 en la suma deben ser cero. De la expansión de $x[n]$ anterior, esto implica que $c_1 + ... + c_l = 0$. La suma obtenida de ondas clásicas existentes (como en la figura) siempre satisfarán esta condición debido a que los cambios en la pendiente, sobre un ciclo, deben sumar todos cero para que la onda se conecte consigo misma.

10.3 Series de Fourier de las ondas elementales

En general, dada una onda $X[n]$ que se repite, podemos evaluar sus coeficientes de series de Fourier $A[k]$, evaluando directamente la transformada de Fourier:

$$A[k] = (1/N)\mathcal{FT}\{X[n]\}(k)$$

$$= (1/N)[X[0] + U^{-k}X[1] + ... + U^{-(N-1)k}X[N - 1]]$$

pero hacer esto directamente para ondas dientes de sierra y parabólicas se requieren de páginas de álgebra (algo menos si fuéramos resort para el cálculo diferencial). En lugar de eso nos apoyaremos en las propiedades de la transformada de Fourier para relacionar la transformada de una señal $x[n]$ con su *primera diferencia*, definida como $x[n] - x[n - 1]$. La primera diferencia de la onda parabólica se convertirá en un diente de sierra, y con ese diente de sierra será simple y sufcente evaluar directamente, ya sí obtendremos la serie de Fourier deseada.

En general, para evaluar la fortaleza del k-ésimo armónico asumiremos que N es mucho más grande que k, $k\omega = 2\pi k/N$ es mucho más pequeña que la unidad y podemos hacer las aproximaciones:

$$\cos(k\omega) \approx 1, \ \mathrm{sen}(k\omega) \approx k\omega$$

Las cuales son buenas dentro de un error pequeño, del orden de $(k/N)^2$. Ahora conectamos este resultado para evaluar:

$$\mathcal{FT}\{x[n] - x[n-1]\} \approx i\omega k \mathcal{FT}\{x[n]\}$$

10.3.1 Onda diente de sierra

Apliquemos esto primero a la onda dientes de sierra $s[n]$. Para $0 \le n \le N$ tenemos:

$$s[n] - s[n-1] = -1/N + \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{para los demás valores} \end{cases}$$

Ignorando la constante de desplazamiento $-1/N$, tenemos un impulso, cero en todas partes excepto en una muestra por ciclo. La sumatoria de la transformada de Fourier sólo posee un término y tenemos:

$$\mathcal{FT}\{s[n] - s[n-1]\}(k) = 1, \ k \neq 0, \ -N < k < N$$

Aplicamos entonces la fórmula de la diferencia hacia atrás, para obtener:

$$\mathcal{FT}\{s[n]\}(k) \approx 1/i\omega k = -(iN)/(2\pi k)$$

válida para valores enteros de k pequeño, comparado con N, pero con $k \neq 0$. (Para obtener la segunda forma de la expresión conectamos en $\omega = 2\pi/N$ y $1/i = -i$.)

Con este análisis no obtenemos el componente DC $\mathcal{FT}\{s[n]\}(0)$, ya que deberíamos haber tenido que dividir por $k = 0$. Podemos en cambio evaluar el término DC como la suma de todos los puntos de la onda: es aproximadamente cero, por simetría.

Para obener una serie de Fourier en términos de las funciones familiares seno y coseno reales, combnamos los términos correspondientes para los valores positivos y negativos de k. El primer armónico ($k = \pm 1$) es:

$$(1/N)[\mathcal{FT}\{s[n]\}(1) \bullet U^n + \mathcal{FT}\{s[n]\}(-1) \bullet U^{-n}]$$

$$\approx (i/2\pi)[U^n - U^{-n}]$$

$$= (\mathrm{sen}(\omega n))/\pi$$

y de manera similar el k-ésimo es

$$= (\mathrm{sen}(k\omega n))/k\pi$$

Así, la serie de Fourier completa es:

$$s[n] \approx (1/\pi)[\mathrm{sen}(\omega n) + (\mathrm{sen}(2\omega n))/2 + (\mathrm{sen}(3\omega n))/3 + \ldots]$$

10.3.2 Onda parabólica

El mismo análisis, con algunas diferencias en los signos y la normalización, funciona para las ondas parabólicas. Primero computamos la diferencia:

$$p[n] - p[n - 1] = [(n/N - 1/2)^2 - ((n\text{-}1)/N - 1/2)^2]/2$$

$$= [(n/N - N/2N)^2 - (n/N - (N\text{-}2)/2N)^2]/2$$

$$= [2n/N^2 - 1/N + 1/N^2]/2$$

$$\approx -s[n]/N$$

De esta manera (de nuevo para $k \neq 0$, y pequeño comparado con N) tenemos:

$$\mathcal{FT}\{p[n]\}(k) \approx (\text{-}1/N)\bullet(\text{-}iN/2\pi k)\bullet\mathcal{FT}\{s[n]\}(k)$$

$$\approx (\text{-}1/N)\bullet(\text{-}iN/2\pi k)\bullet(\text{-}iN/2\pi k)$$

$$= N/(4\pi^2 k^2)$$

y como antes, tenemos la serie de Fourier:

$$p[n] \approx (1/(2\pi^2)[\cos(\omega n) + (\cos(2\omega n))/4 + (\cos(3\omega n))/9 + ...]$$

10.3.3 Ondas cuadradas y triangulares simétricas

Para ver cómo obtener la serie de Fourier para las ondas clásicas en general, considere primero la onda cuadrada,

$$x[n] = s[n] - s[n - N/2]$$

igual a 1/2 para la primera mitad del ciclo ($0 <= n < N/2$) y -1/2 para los demás valores. Obtenemos la serie de Fourier conectnado en la serie para $s[n]$ dos veces:

$$x[n] \approx (1/\pi)[\mathrm{sen}(\omega n) + (\mathrm{sen}(2\omega n))/2 + (\mathrm{sen}(3\omega n))/3 + ...$$

$$\text{-}\mathrm{sen}(\omega n) + (\mathrm{sen}(2\omega n))/2 - (\mathrm{sen}(3\omega n))/3 \pm ...]$$

$$= (2/\pi)[\mathrm{sen}(\omega n) + (\mathrm{sen}(3\omega n))/3 + (\mathrm{sen}(5\omega n))/5 + ...]$$

La onda triangular simétrica (figura 10.6) está dada por

$$x[n] = 8p[n] - 8p[n - N/2]$$

y de manera similar se convierte a

$$x[n] \approx (8/\pi^2)[\cos(\omega n) + (\cos(3\omega n))/9 + (\cos(5\omega n))/25 + ...]$$

10.3.4 Onda triangular en general (no simétrica)

Una onda triangular no simétrica aparece en la figura 10.7. Aquí tenemos el ciclo organizado de tal manera que, primero, el componente DC es cero (y así las dos esquinas tienen alturas iguales y opuestas) y segundo, el punto medio del segmento más corto pasa por el punto (0,0).

Los dos segmentos de línea tienen pendientes iguales a $1/M$ y $-2/(N - 2M)$, y así la descomposición en componentes de ondas parabólicas está dado por:

$$x[n] = [N^2/(MN - 2M^2)](p[n - M] - p[n + M])$$

(estamos utilizando aquí la periodicidad de $p[n]$ para reemplazar $p[n - (N - M)]$ por $p[n + M]$.)

La forma más general para trabajar con las combinaciones lineales de las ondas elementales (parabólicas y/o diente de sierra) es regresar a la serie de Fourier compleja, como lo hicimos para encontrar las serie de las ondas elementales mismas. Pero en este caso particular podemos utilizar identidades trigonométricas para evitar el trabajo extra de convertir atrás y adelante. Conectamos primero en la serie de Fourier, real:

$$x[n] = [N^2/(2\pi^2(MN - 2M^2))][\cos(\omega(n - M)) - (\cos(\omega(n + M)) + [\cos(2\omega(n - M)) - (\cos(2\omega(n + M))]/4 + ...]$$

Ahora utilizamos la identidad:

$$\cos(a) - \cos(b) = 2\mathrm{sen}((b - a)/2)\mathrm{sen}((a + b)/2)$$

así que, por ejemplo:

$$\cos(\omega(n - M)) - (\cos(\omega(n + M)) = 2\mathrm{sen}(2\pi^2(M/N)\mathrm{sen}(\omega n)$$

(Aquí utilizamos de nuevo la definición de $\omega = 2\pi/N$.) Esta es una simplificación ya que el primer término seno no depende de n; éste es sólo un término de amplitud. Aplicando la identidad para todos los términos de la expansión para $x[n]$ tenemos:

$$x[n] = a[1]\mathrm{sen}(\omega n) + a[2]\mathrm{sen}(2\omega n) + ...$$

donde las amplitudes de los componentes están dadas por:

$$a[k] = (1/(\pi^2(M/N - 2(M/N)^2))\bullet(\mathrm{sen}(2\pi kM/N))/k^2$$

Note que el resultado no depende de los valores M y N separados, si no de su razón M/N (lo que no es una sorpres ya que la forma de la onda depende de esa razón). Si buscamos en valores de k pequeños:

$$k < 1/(4M/N)$$

el argumento de la función es menor que $\pi/2$ y utilizando la aproximación $\mathrm{sen}(\theta) = \theta$ encontramos que $a[k]$ decae según $1/k$, precisamente según lo hacen los parciales de la onda diente de sierra. Pero para valores más grandes de k el término seno oscila entre 1 y -1, de tal manera que a amplitud cae irregularmente según $1/k^2$.

La figura 10.8 muestra la fortaleza de los parciales con M/N ajustado a 0.03; aquí, nuestra predicción es que la dependencia $1/k$ deberá extenderse a $k \approx 1/(4\bullet 0.03) \approx 8.5$, aproximadamente en acuerdo con la figura.

Otra mnera de ver porqué los parciales deben comportarse según $1/k$ para valores bajos de k y de $1/k^2$ después de esto, es comparar el período de un parcial dado con la longitud del segmento corto, $2M$. Para los parciales con numeración menor que $N/4M$, el período es por lo menos dos veces la longitud del segmento corto, y en esa escala la onda prácticamente no se distingue de una diente de sierra. Para parciales con numeración mucho mayor de $N/2M$, las dos esquinas de la onda triangular están por lo menos, un período aparte, y en esas frecuencias más altas las dos esquinas (cada una con frecuencia dependiente de $1/k^2$) se resuelven partiendo de las demás. En la figura, la muesca en el parcial 17 ocurre en la longitud de onda $N/2M \approx 1/17$, y en esa longitud de onda las dos esquinas están un ciclo aparte, debido a que las esqinas son de signos opuestos, se cancelan.

10.4 Prediciendo y controlando el sobre-doblado

Descendemos ahora a la situación real, en la cual el período de la onda no puede asumirse arbitrariamente largo y en valores enteros. Suponga (como definición) que queremos sintetizar sonidos a 440 Hertz (A sobre el C medio), y que estamos utilizando una velocidad de muestras de 44100 Hertz, de tal manera que el período es de 100.25 muestras aproximadamente. Teóricamente, si tenemos una velocidad de muestras muy alta deberíamos esperar que el décimo quinto parcial tuviera una magnitud de 1/50 comparado con la fundamental y una frecuencia de cerca de 20 kHz. Si hacemos muestras de esta onda con una velocidad de muestras de 44100 (más baja), entonces los parciales por encima de esta frecuencia tendran alias, como se describió en la sección 3.1. La fortaleza relativa de los parciales sobre-doblados será del orden de los -32 decibeles verdaderamente inaudible. Si la frecuencia fundamental se eleva más allá, habrá más parciales, más audibles, que llegan a la frecuencia de Nyquist (la mitad de la velocidad de las muestras) y comienza el sobre-doblado.

Los problemas de sobre-doblado son mucho menos pronunciados para las ondas que sólo tienen esquinas (en lugar de saltos) debido a la caída más rápida de las frecuencias parciales más altas; por ejemplo, una onda triangular simétrica a 440 Hertz debe tener una caída del doble o -64 decibeles. En general, sin embargo, las ondas con discontinuidades son un mejor punto de partida para la síntesis sustractiva (la técnica clásica más popular). En caso de que estuviera esperanzado, el filtrado sustractivo no puede remover el sobre-doblado una vez está presente en la señal de audio.

10.4.1 Sobre-muestreo

Como una primera línea de defensa contra el sobre-doblado, podemos sintetizar la onda a una velocidad de muestras mucho más alta, aplicando un filtro pasa-bajos cuya frecuencia de corte se ajusta a la frecuencia de Nyquist (para la velocidad de muestras original), y luego se ejecutan las muestras. Por ejemplo, según el anterior escenario (velocidad de muestras 44100 Hertz, sonido 440 Hertz), podemos generar una diente de sierra a una velocidad de muestras de $16 \cdot 44100 = 705600$ Hertz. Necesitaremos preocuparnos únicamente del exceso de frecuencias de $705600-20000 = 685600$ Hertz (de tal manera que ellas están sobre-dobladas en frecuencias audibles; el sobre-doblado en frecuencias ultrasónicas normalmente no nos importará) de tal manera que el primer parcial problemática es $85600/440 = 1558$, cuya amplitud es de -64dB con respecto a la fundamental.

Esta atenuación se degrada en 6dB por cada octava que se eleva la fundamental, de tal manera que a 10 kHz la diente de sierra goza de una caída de 37dB entre la fundamental y el parcial sobre-doblado más fuerte. De otro lado, al elevar la velocidad de las muestras por un factor adicional de dos, se reduce el sobre-doblado en la misma cantidad. Si realmente queremos tener un control de 60 dB para el sobre-doblado -hasta los 10 kHz en la fundamental, deberemos tener un sobre-muestreo con un factor de 256, para una velocidad de muestras de 11 millones de Hertz.

10.4.2 Ondas triangulares serpenteantes

Para frecuencias fundamentales bajas, el sobre-muestreo es una manera fácil de obtener la protección adecuada para el sobre-doblado. Si queremos admitor frecuencias más altas, necesitaremos una aproximación más sofisticada. Una posibilidad es reemplazar las discontinuidades por rampas, o en otras palabras, reemplazar los componentes de la diete de sierra por ondas triangulares, según se trató en la sección 10.3.4, con valores de M/N suficientemente pequeños, de tal manera que el resultado suena como una onda diente de sierra, pero lo suficientemente grande como para controlar el sobre-doblado.

Regresando a la figura 10.8, suponga por ejemplo que imitamos una onda diente de sierra con una onda triangular con M iguala dos muestras, de tal manera que la primera muesca cae en la frecuencia de Nyquist. Los parciales por encima de la primera muesca (el parcial 17 en la figura) quedarán sobre-doblado; el peor de estos está aproximadamente a 40 dB por debajo de la fundamental. De otro lado, la fortaleza de los parciales comienza a caer más rápido que la de los de una verdadera diente de sierra a casi la mitad de la frecuencia de Nyquist. Esto es aceptable en algunas, mas no en todas las situaciones.

La estrategia de la onda triangular puede cominarse con el sobre-muestreo para mejorar aún más la situación. De nuevo, en el contexto de la figura 10.8, suponga hacemos un sobre-muestreo por un factor de 4 y ajustamos la primera muesca a la velocidad de muestras original. Los parciales por encima de la frecuencia de Nyquist (el parcial 8, a la frecuencia fundamental que se muestra en la figura) sigue los de la verdadera onda diente de sierra muy bien. El sobre-doblado se encuentra en únicamente en el parcial 48, y está 52 dB por debajo de la fundamental. Este comportamiento general se mantiene para cualquier frecuencia fundamental que esté por encima 1/4 de la velocidad de muestras (después de lo cual M excede $N/2$). Ajustar la frecuencia de la muesca a la velocidad de muestras original equivale a ajustar el segmento de longitud $2M$ a una muestra (a la velocidad de muestras original).

10.4.3 Empalme de transición

Según el punto de vista desarrollado en este capítulo, la energía de los componentes espectrales de las ondas clásicas puede atribuirse por entero a sus saltos y a sus esquinas. Esto es artificial, por supuesto: la energía emana de la onda completa. Nuestra derivación del espectro de las ondas clásicas utiliza los saltos y las esquinas como un libro contable, y esto es posible ya que la onda completa está determinada por sus posiciones y magnitudes.

Tomando este ardid incluso más allá, el problema de hacer versiones de ondas clásicas limitadas por bandas puede ser atacado haciendo versiones de saltos y esquinas limitadas por bandas. Ya que los saltos son la amenaza más seria para el sobre-doblado, nos enfocaremos en ellos aquí, aunque la aproximación descrita trabaja perfectamente para las esquinas también.

Para construír una función de escalón limitada por banda, todo lo que tenemos que hacer es adicionar los componentes de Fourier de una onda cuadrada, tantos como queramos, y luego colectar la función escalón para cualquiera de los saltos. La figura 10.9 muestra la suma parcial de Fourier correspondiente a una onda cuadrada, usando los parciales 1, 3, 5, 7, 9 y 11. la frecuencia de corte puede ser tomada como 12ω (si ω es la frecuencia fundamental).

Si doblamos el período de la onda cuadrada, para llegar a la misma frecuencia de corte, debemos adicionar el doble de los parciales de Fourier, hasta el número 23, por ejemplo. Extendiendo este proceso al infinito, podríamos ver eventualmente la función escalón limitada por banda ideal, dos veces por período (arbitrariamente largo).

En la práctica podemos hacerlo muy bien utilizando únicamente el primero de dos parciales (a una y tres veces la fundamental). La figura 10.10 (parte a) muestra una aproximación de dos parciales de una onda cuadrada. La frecuencia de corte es de cuatro veces la fundamental; de tal manera que si el perído de la onda es de ocho muestras, el corte queda a la frecuencia de Nyquist. La parte (b) de la figura muestra cómo podemos utilizar esta función escalón para sintetizar, aproximadamente, una onda cuadrada al doble del período. Si la frecuencia de corte es la frecuencia de Nyquist, el período de la onda de la parte (b) es de 16 muestras. Cada transición dura cuatro muestras, debido a que la onda cuadrada limitada por banda tiene un período de ocho muestras.

Podemos fabricar una onda diente de sierra limitada por banda adicionando una transición de cuatro muestras de longitud para la función rampa de tal manera que el extremo de la función resultante se encuentre suavemente con sí misma en el otro extremo, como se muestra en la parte (c) de la figura. Hay una transición por período, de tal manera que el período debe ser de por lo menos cuatro muestras; la frecuencia fundamental más alta que podemos sintetizar de esta manera es la mitad de la frecuencia de Nyquist. Para esta o para una frecuencia fundamental más baja, los productos del sobre-doblado quedarán hasta 60 dB más silenciosos que la fundamental.

La figura 10.11 muestra cómo generar una diente de sierra con un empalme de transición. Los dos parámetros son f, la frecuencia fundamental y b, el límite de banda, asumiendo que es tan grande como f. Comenzamos con una onda diente de sierra digital (un fasor) con rango de valores de -0.5 a 0.5. La transición tendrá lugar en la mitad del ciclo, cuando el fasor cruce el 0. La tabla de onda es leída en un tiempo constante, $1/b$, con relación a f. La lectura de tabla es hecha sin envoltura, de tal manera que el rango de entrada es el rango de salida, sea 0.5 o -0.5.

Al finalizar el ciclo el fasor salta de manera discontinua de -0.5 a 0.5, pero la salida de la tabla de transición salta en una cantidad igual y opuesta, de tal manera que resulta continua. Durante la porción de la onda en la cual la tabla de transición se lee en uno u otro extremo, la salida describe un segmento de línea recto.

10.5 Ejemplos

Combinación de ondas diente de sierra

El ejemplo J01.even.odd.pd (figura 10.12, parte a) muestra cómo combinar dientes de sierra por pares para extraer los armónicos pares e impares. Las ondas resultantes son las que se muestran en la figura 10.3. El ejemplo J012.trapezoids.pd (parte b de la figura) demuestra la combinación de tres ondas dientes de sierra en fases y amplitudes arbitrarias; la onda clásica resultante tiene hasta tres saltos y no tiene esquinas. Los tres segmentos de linea son horizontales en tanto la suma de los tres saltos es cero; de otra manera los segmentos son puestos en pendiente para hacer saltos desbalanceados de tal manera que el resultado se repita de un período al siguiente.

El ejemplo J03.pulse.width.mod.pd (que no se muestra) combina dos ondas dientes de sierra de signo opuesto, con frecuencias ligeramente diferentes de tal manera que las fases relativas cambian continuamente. Su suma es una onda rectangular cuya amplitud varía en el tiempo. Esto es conocido como la modulación del ancho de pulso <pulse width modulation> (“PWM”).

El ejemplo J04.corners.pd (figura 10.13) muestra cómo adicionar ondas parabólicas para fabricar una onda combinada con tres esquinas. Cada onda parabólica está computada a partir de una onda dientes de sierra (con rango entre -0.5 y 0.5) elevándola al cuadrado, multiplicándola por 0.5, y sustrayend el componente DC de -1/12, o -0.08333. El parche combina tres de tales ondas parabólicas con amplitudes y fases controladas. En tanto las amplitudes suman cero, la onda resutante consiste de segmentos de línea, cuyas esquinas están localizadas de acuerdo con las tres fases y tienen cambios en su pendiente de acuerdo con las tres amplitudes.

Estrategia para ondas dientes de sierra cn limitación por banda

El ejemplo J05.triangle.pd (figura 10.14, parte a) muestra una manera simple de hacer una onda triangular, en la cual únicamente se especifican las pendientes del segmento que se eleva y del segmento que cae. Un fasor suministra la forma de la elevación (la amplitud, que conforma la pendiente), y el mismo fasor, al que se le sustrae uno, da el segmento de caída. El valor mínimo de las dos funciones lineales sigue al fasor que se eleva hasta la intersección de los dos, y luego continúa el fasor de caída de regreso a cero, para finalizar el ciclo.

Una onda triangular puede ser recortada arriba y abajo para hacer una onda trapezoidal, la cual puede ser utilizada como un pulso de audio frecuencia o, a más bajas frecuencias de la fundamental, como una envolvente ASR (ataque/sostenido/liberación <attack/sustain/release>). El parche J06.enveloping.pd (figura 10.14 parte b) demuestra esto. Se utiliza la misma forma de elevación del ejemplo previo, y la forma de la caída difiere únicamente en que su fase es ajustada de tal manera que cae a cer en un punto controlable (no necesariamente al final del ciclo como antes). El objeto clip~ previene la elevación por encima de 1 (de tal amnera que, si la intersección de los dos segmentos es más alta que uno, obtenemos un segmento horizontal de “sostenido”), y también la caída por debajo de cero, de tal forma que una vez la forma de la caída llegue a cero, la salida es cero para el resto del ciclo.

El ejemplo J07,oversampling.pd muestra cómo utilizar el incremento en la velocidad de las muestras para reducir el sobre-doblado utilizando un objeto phasor~ y un filtro Butterworth de tres polos y tres ceros para reducir las amplitudes de los parciales por encima de la frecuencia Nyquist del parche padre (que corre a la velocidad de muestras original) de tal manera que la salida no tendrá sobre-doblado cuando se baje la velocidad de las muestras en el objeto outlet~. El ejemplo J08.classicsynth.pd demuestra el uso de fasores con velocidad de muestras incrementada, como generadores de señal para fabricar una imitación de un sintetizador clásico haciendo síntesis sustractiva.

El ejemplo J09.bandlimited.pd muestra cómo utilizar el empalme de transición como una manera alternativa de generar una onda dientes de sierra con un sobre-doblado controlado. Este tiene la ventaja de ser más directo (y usualmente de menos intensidad de cómputo) que el método de velocidad de muestras incrementada. De otro lado, est técnica depende del uso del recíproco de la frecuencia fundamental como una seal de audio con derecho propio (para controlar la amplitud de la señal cambiante periódica que lee la tabla de transición) y, de la misma manera que para la técnica PAF del capítulo 6, se deben tener precauciones para evitar clicks cuando la frecuencia fundamental cambie de manera discontinua.

Ejercicios

1. Un objeto phasor~ tiene una frecuencia de 441 Hertz (a una velocidad de muestras de 44100). Cuál es la amplitud del componente DC? De la fundamental? Del parcial a 22050 (por encima del cual los parcial presentan sobre-doblado?

2. Una onda cuadrada oscila entre 1 y -1. Cuál es su amplitud RMS?

3. En la sección 10.3 una onda cuadrada se presentó como una onda impar cuya serie de Fourier consistía de funciones seno (no coseno). Si la onda cuadrada es adelantada en 1/8 de ciclo en su fase, de tal amnera que aparezca como una función par, cómo queda su serie de Fourier?

4. Una onda rectangular es de 1 por 1/4 de ciclo, cero para 3/4 de ciclo. Cuáles son las fortalezas de sus armónicos a 0, 1, 2, 3 y 4 veces la fundamental?

5. Cuánto es 1 + 1/9 + 1/25 + 1/49 + 1/81 + ...?